UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO EM TURMAS DE 5.º ANO

Marcelo Cardoso da Costa

Mestrado em Educação
Área de Especialidade Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pela
Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

2018

"Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, não aprendo nem ensino. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo".

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho de projeto tem como objetivo perceber como os alunos de turmas de 5.º ano, de um colégio no Brasil, adicionam e subtraem números racionais na representação fracionária, no contexto de uma unidade de ensino apoiada na utilização do modelo linear de barras. Para alcançar esse objetivo, foi implementada uma sequência de tarefas envolvendo não somente as operações de adição e subtração de frações, como também tarefas abrangendo os tópicos de equivalência e comparação de frações, considerados pré-requisitos para as demais operações.

O enquadramento teórico centra-se nas ideias e princípios inerentes à Educação Matemática Realista – EMR (*Realistic Mathematic Education* – RME), reportando-se ao uso de modelos e contextos no decorrer do processo de ensino e aprendizagem, com destaque ao modelo linear de barras. Adicionalmente, este estudo apoia-se na discussão entre os conhecimentos conceitual e processual que revestem a aprendizagem dos números racionais e suas operações.

A metodologia adotada enquadra-se nos fundamentos do paradigma interpretativo e insere-se na modalidade de estudos de casos observacionais. A recolha de dados foi efetuada em duas turmas de 5º ano, sendo analisadas todas as soluções dadas pelos grupos para as tarefas propostas durante a unidade de ensino implementada. Atuei como participante observador, não interagindo com os demais participantes no momento da investigação em sala de aula.

Os resultados mostram que os alunos desenvolveram seus conhecimentos conceituais e processuais inerentes às operações de adição e subtração de frações, a partir da implementação de uma sequência didática apoiada no modelo linear de barras, com o objetivo de transitar entre as representações visual e simbólica, inter-relacionando-as. No entanto, a maioria das estratégias escolhidas pelos alunos para solucionarem as tarefas propostas apontam para uma predominância da representação simbólica, através da utilização de regras e procedimentos algorítmicos, em detrimento da representação visual.

Palavras-chave: Números Racionais, fração, modelo linear de barra, adição e subtração de frações, equivalência de frações, comparação de frações.

ABSTRACT

This project work aims to understand how students in 5th grade classes, of a school in Brazil, add and subtract rational numbers in fractional representation, in a context of a teaching proposal based on the use of the linear bar model. To achieve this objective, a sequence of tasks was implemented, involving not only fractional addition and subtraction, but also tasks covering the topics of equivalence and comparison, considered as prerequisites for other operations.

The theoretical framework focuses on the ideas and principles inherent to Realistic Mathematic Education (EMR), referring to the use of models and contexts in the teaching and learning process, with emphasis on the linear bar model. In addition, this study is based on the discussion between the conceptual and procedural knowledge that covers the learning of rational numbers and their operations.

The methodology adopted is based on the foundations of the interpretative paradigm and is part of the observational case studies modality. The data was collected in two classes of 5th grade, and all the solutions provided by the students groups for the tasks implemented during the teaching unit were analyzed. I acted as an observer participant, not interacting with the other participants at the moment of the research in the classroom.

The results show that the students developed their conceptual and procedural knowledge inherent to the operations of addition and subtraction of fractions, from the implementation of a didactic sequence supported by the linear bar model, with the objective of transiting between the visual and symbolic representations, interrelating them. However, most of the strategies chosen by the students to solve the proposed tasks point to a predominance of symbolic representation, through the use of algorithmic rules and procedures, in detriment of the visual representation.

Keywords: Rational numbers, fraction, linear bar model, addition and subtraction of fractions, equivalence of fractions, comparison of fractions.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, pelos seus ensinamentos, dedicação, incentivo, confiança e permanente disponibilidade no decorrer de todo o processo.

A todos os professores e aos restantes colegas deste curso de Mestrado, com quem tive a honra de compartilhar significativos momentos de aprendizagem.

À Direção, à Supervisão e à Coordenação Pedagógica do Colégio Nossa Senhora de Lourdes – Botafogo, em especial à Irmã Maria Carmem, à Cida, à Sandra Mara e à Daniella, que abriram as portas do colégio e deram todo o apoio necessário para a realização deste estudo.

A todos os participantes nesta investigação, em especial às Professoras Fernanda e Lorena, pela disponibilidade, dedicação e interesse demonstrados, e aos alunos, pela colaboração e entusiasmo com que se dispuseram a participar deste projeto.

A todos os amigos, pelo apoio e companheirismo em todas as horas.

À minha família, pela sustentação afetiva permanente e pela confiança depositada em mim, fundamentais para que eu pudesse me lançar nesse desafio e, neste momento, estar concretizando mais uma importante etapa em minha trajetória. Em especial, aos meus pais, Ernesto (*in memoriam*) e Lineia, referências basilares em todos os sentidos e, em especial, por me terem transmitido valores fundamentais para a minha formação pessoal, inclusive o inestimável valor do ensino.

Aos meus sogros, Álvaro e Vera, por me terem recebido como um filho em seu seio familiar, dedicando a mim todo o carinho, o cuidado e a confiança.

Por fim, agradeço à minha companheira Cláudia, minha grande incentivadora, com quem compartilho todos os momentos e com quem venho construindo o alicerce de uma vida em comum, baseada no amor e no respeito mútuo, e ao meu amado sobrinho Felipe, que nos últimos dez anos vem enchendo de luz as nossas vidas. A eles, dedico este estudo.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

1 – Introdução

1.1 - Motivação do trabalho

Ao longo do meu percurso profissional no Brasil atuando como Professor de Matemática nos Ensinos Fundamental II e Médio, correspondentes, em Portugal, ao 6.º ano do 2.º ciclo e ao 3.º ciclo do Ensino Básico e ao Ensino Secundário, respectivamente, venho constatando por parte de um considerável número de alunos, um crescente desinteresse quanto à aprendizagem da Matemática. Tal percepção tem se confirmado através de pesquisas informais que tenho feito com colegas de profissão atuantes nos mesmos segmentos, e que manifestam claramente o mesmo sentimento que possuo, bem como em conversas com os alunos em sala de aula, nas quais busco compreender como eles percebem a Matemática quanto a sua utilidade no dia a dia, de que forma ela vem sendo ensinada a eles durante as suas trajetórias escolares e, particularmente, em que conteúdos já estudados eles detectam suas maiores dificuldades.

Um dos pontos negativos citados pelos alunos refere-se à dinâmica vivenciada na sala de aula. Apesar de nas últimas décadas terem se intensificados os estudos acadêmicos objetivando uma maior compreensão dos processos de ensino e aprendizagem no campo da Educação Matemática, pesquisas apontam que ainda hoje perdura, com forte incidência, a prática de um ensino mecanizado, que privilegia a memorização de regras e procedimentos de cálculo em detrimento a uma maior compreensão conceitual, com conteúdos sendo apresentados carentes de significados concretos para os alunos, que não enxergam neles qualquer utilidade para as suas vidas.

A dinâmica utilizada em sala de aula parece, muitas vezes, reduzir-se à aulas expositivas, com o professor guiando-se pelo manual escolar para a elaboração dos seus planos de aulas. Após a introdução aos conteúdos a serem estudados, segue-se, habitualmente, para uma sequência de exercícios repetitivos, com o argumento de que a “repetição leva à fixação” (Dante, 1985, p. 33). Ainda que por um lado haja defensores da validade dessa argumentação, por outro lado este é um argumento discutível, uma vez que a repetição pode levar à automatização e à mecanização cegas

(Dante, 1985), sem o necessário desenvolvimento do conhecimento conceitual dos conteúdos estudados.

As aulas de Matemática tornam-se, portanto, maçantes, desprovidas de interesse e, em consequência, os alunos afastam-se da disciplina; para eles basta estudar o suficiente para serem aprovados ao final do ano letivo. Conforme os alunos progridem em seus percursos escolares, esse sentimento negativo parece se agravar.

Ao analisarmos sob uma perspectiva temporal é fácil percebermos que as crianças nas fases do pré-escolar, do ensino infantil e dos primeiros anos do ensino básico, em sua maioria, denotam um grande atrativo pela Matemática, certamente pelas particularidades como esta lhes é apresentada, normalmente através de atividades que privilegiam o aspecto lúdico com jogos que desafiam e estimulam a criatividade delas. Em geral, crianças gostam de sentirem-se desafiadas, superarem os obstáculos encontrados e demonstrarem essas superações, buscando novos desafios. E a Matemática não deixa de oferecer um grande manancial de oportunidades para elas neste sentido. Mas, se assim é, cabe perguntar: em que ponto do percurso escolar, uma parcela significativa (se não a maior parcela) das crianças deixa de se interessar pela Matemática ? É possível detectarmos claramente quando ocorre essa ruptura ? Que conteúdos proporcionam a elas experiências tão negativas que deflagram esse processo de afastamento da Matemática, privando-as, inclusive, de prosseguirem em suas vidas profissionais em carreiras que necessitem de uma sólida base matemática ?

Uma considerável parcela de alunos, ao ser questionada se consegue perceber em que ponto dos seus percursos escolares a Matemática começou a lhes ser difícil, enfadonha e desinteressante, faz referência a um tópico específico que, no entendimento deles, representa o início das dificuldades encontradas na disciplina: a introdução dos números racionais no currículo escolar (posteriormente essa dificuldade será agravada, em larga escala, com a introdução dos conteúdos algébricos).

Segundo os alunos, ao passarem do estudo dos números naturais para os números racionais (especialmente em sua forma fracionária), a grande maioria dos conceitos, regras e procedimentos que vinham sendo usados até então, passam a não ter mais "utilidade", sendo necessário aprender formas diferentes para operacionalizar com esse novo conjunto numérico. Sem citar os diversos conceitos atrelados a esse novo "universo" de números (os chamados subconstructos dos números racionais), os quais, em muitas ocasiões, não são compreendidos devidamente pelos alunos até o final de seus percursos escolares. Não é raro encontrarmos estudantes que, apesar de terem ótima destreza operando com os números racionais, não entendem o "porquê" de fazer da forma que fazem, haja visto terem aprendido as operações de forma mecanizada, apenas memorizando-as e repetindo-as, nem ao menos compreendendo o real significado das operações e resultados encontrados.

No ano de 2017, durante a parte curricular realizada no âmbito do presente Mestrado na disciplina Didática dos Números e da Álgebra, ministrada pela Prof. Doutora Hélia Oliveira, pude constatar claramente as dificuldades apresentadas pelos alunos dos anos intermediários do ensino básico quanto à aprendizagem dos conceitos inerentes aos números racionais, tanto no Brasil como em Portugal. Em conjunto com as professoras Ana Arrabaça e Paula Rangel, realizamos um trabalho de conclusão desta disciplina no qual desenvolvemos e aplicamos a alunos portugueses e brasileiros sete tarefas envolvendo os diferentes significados dos números racionais, encontrando resultados similares nos dois países, que indicavam apropriações indevidas dos conceitos atrelados aos números racionais, além de indícios de utilização de regras e procedimentos de cálculo sem o necessário entendimento da razão de seus usos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs - 1997, a Matemática é uma área do conhecimento que "comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico" (Brasil, 1997, p.24). Dessa forma, a Matemática auxilia de forma direta na formação das capacidades intelectuais, a estruturar o pensamento, agilizar o raciocínio dedutivo do aluno, tanto na sua aplicação a problemas como na vida cotidiana e nas atividades do mundo do trabalho e, até mesmo no auxílio da construção do conhecimento em outras áreas curriculares (Brasil, 1997, p.25).

Estou convicto de que é essa Matemática viva, transformadora e, principalmente, inserida no cotidiano que precisamos desenvolver com nossos alunos. Perceber no dia a dia o crescente desinteresse dos estudantes pela aprendizagem da Matemática torna-se um processo penoso e frustrante para nós professores. Não podemos permitir que os alunos continuem a enxergar a Matemática como um amontoado de regras e procedimentos que, segundo suas crenças, em quase nada interferem em suas vidas, e a manifestar o desinteresse em aprender conteúdos que "de nada lhe servirão na prática".

É essencial, portanto, que continuemos a repensar nossas práticas letivas com o intuito de aprimorá-las, para que possamos construir com os alunos uma Matemática que lhes desperte o interesse, apoiada em seus contextos sociais e que leve em conta as suas experiências de vida.

1.2- Pertinência do trabalho

Os Números Racionais, especialmente em sua representação fracionária, são considerados pelos alunos e por uma considerável parcela de professores, como um dos tópicos de maior complexidade no ensino básico e, consequentemente, de difícil aprendizagem, sendo as frações conhecidas por constituir um obstáculo para as crianças na escola básica (Moss & Case, 1999) e uma das principais fontes de “fobia matemática” – “mathphobia” (Wu, 2005). Resultados de avaliações e estudos realizados tanto no âmbito nacional quanto internacional (PISA, SAEB – Prova Brasil) atestam o baixo rendimento alcançado pelos alunos nesse tema, reforçando a urgente necessidade de que sejam encontrados caminhos que levem os estudantes a reconhecerem os números racionais em seu cotidiano, revestindo de significados a aprendizagem desse conjunto numérico e levando-os a apropriarem-se da ideia do sentido de número inerente a eles.

Segundo Caraça (1984), o conjunto dos números racionais surgiu da necessidade da criação de um novo campo numérico que ampliasse o domínio dos números naturais, como resposta direta às necessidades de cálculo emergentes no quotidiano. Possui, portanto, aplicabilidade imediata no dia a dia das pessoas, seja através dos sistemas monetários e métricos ou das receitas de preparo de alimentos (0,50 cêntimos de euro, 85,4 m² de área de um terreno, $\frac{1}{4}$ de xícara de açúcar), dentre outros usos. No entanto, atualmente, o que se constata a nível de ensino-aprendizagem escolar não condiz com a aplicação prática e significativa dos números racionais, deixando em segundo plano o necessário entendimento conceitual quanto aos seus múltiplos significados.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não o tem. Elas usam os termos fracionais certos, elas falam sobre frações coerentemente, elas resolvem alguns problemas fracionais, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola, sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (Nunes & Bryant, 1997, p. 191).

Portanto, ao constatar a complexidade que reveste a aprendizagem dos números racionais e, considerando que o correto desenvolvimento do conceito de número racional é essencial para o percurso escolar dos alunos afetando diretamente os seus desempenhos, uma vez que permeará todos os demais tópicos da Matemática que lhes serão ensinados posteriormente, optei por dedicar o meu trabalho de projeto à investigação de como se processa a aprendizagem das operações de adição e subtração dos números racionais em sua representação fracionária através de uma unidade de ensino com o apoio do modelo linear de barras, tendo baseado o meu estudo em turmas do 5.º ano de escolaridade de um colégio privado localizado no Rio de Janeiro, Brasil, no qual fui professor entre os anos de 2005 a 2016.

O 5.º ano representa um "fechamento de ciclo" para a compreensão significativa dos conceitos iniciais correspondentes aos racionais aprendidos e trabalhados anteriormente, além de ser o ano no qual deve se consolidar a aprendizagem das operações básicas com os números racionais, em especial a adição e a subtração. Assim, ao optar por esse tema, busco conjugar as minhas motivações pessoais, fruto da minha prática profissional, à pertinência contextual e à relevância curricular, inerentes ao mesmo.

1.3 - Objetivo e questões de investigação

No âmbito deste trabalho de projeto, desenvolveu-se uma investigação, intitulada **Adição e Subtração de Números Racionais na Representação Fracionária: uma proposta de ensino em turmas de 5.º ano**, que incluiu os tópicos de equivalência e comparação de frações por constituírem-se fundamentos para a correta compreensão conceitual e processual das operações de adição e subtração dos números fracionários, e teve por objetivo final compreender como os alunos de duas turmas de 5º ano, em um colégio brasileiro, adicionam e subtraem frações no contexto de uma unidade de ensino apoiada na utilização do modelo linear de barras, tendo por base as seguintes questões de partida:

- Que recursos e estratégias utilizam e que dificuldades vivenciam os alunos na determinação de frações equivalentes e na comparação de frações, pré-requisitos para as operações de adição e subtração dos números fracionários ?

- Que estratégias utilizam os alunos para adicionar ou subtrair números racionais na sua representação fracionária ?

- Que dificuldades vivenciaram os alunos relativamente à adição e subtração de números fracionários, ao longo da unidade de ensino ?

Através desta investigação pretende-se, adicionalmente, refletir sobre as potencialidades do uso do modelo linear de barras para apoiar os alunos na determinação de frações equivalentes, na comparação de frações e na aprendizagem das operações de adição e subtração de números racionais na representação fracionária.

1.4 - Organização do estudo

A apresentação do trabalho de projeto encontra-se organizada em seis capítulos, conforme segue:

- No primeiro capítulo, exponho as razões que me motivaram a escolher o tema e a pertinência do mesmo, apresentando o objetivo do estudo e as questões de investigação que me propus a estudar.

- No segundo capítulo, apresento o enquadramento teórico, consoante a revisão da literatura realizada.

- No terceiro capítulo, discorro sobre o planejamento da unidade de ensino aplicada, indicando as ideias gerais que nortearam a investigação, às tarefas propostas e a calendarização da unidade de ensino.

- No quarto capítulo, descrevo as opções metodológicas adotadas, apresento os participantes envolvidos e explicito os processos de recolha de dados utilizados.

- No quinto capítulo, realizo a análise dos dados recolhidos durante a investigação.

- No sexto capítulo, apresento as considerações finais e exponho as principais conclusões do estudo e as suas limitações, terminando com uma reflexão final sobre a realização deste trabalho.

2- Fundamentação Teórica

Neste capítulo apresento a revisão da literatura que orientou o estudo em questão, iniciando com comentários acerca das características inerentes aos números racionais, norteado, especialmente, pelos estudos de Kieren e Behr e colegas do *Rational Number Project*, passando para a exposição dos conceitos de conhecimentos conceituais e processuais referentes à aprendizagem, para, em seguida, destacar a teoria conhecida como Educação Matemática Realista - EMR (*Realistic Mathematic Education* – RME) e o uso de modelos e contextos como apoio ao processo de ensino e aprendizagem, com destaque para o modelo linear de barras, fazendo referência ao uso intensivo deste modelo no ensino de Singapura; na sequência, teço comentários sobre as operações de cálculo e resoluções de problemas com números fracionários apoiadas no modelo linear de barras e, finalizo abordando os documentos oficiais brasileiros em vigência e a forma como os Números Racionais são tratados por eles, nomeadamente nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (elaborados pelo MEC - Brasil) e nos descritores emitidos pela SME - RJ - Secretaria Municipal de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

2.1 - Características dos Números Racionais

Ao ingressarem nas escolas as crianças já trazem consigo uma carga de conhecimentos informais acerca de diversos aspectos matemáticos, tais como: noções dos números, de medidas, do espaço e da forma, etc., adquiridos através de suas vivências e de suas observações, como por exemplo, ao somar pontos de um jogo, ao controlar a quantidade de cromos numa colecção, etc.

Desse conhecimento prévio fazem parte, também, algumas noções iniciais dos números racionais, notadamente os conceitos básicos de metade, da quarta parte, etc. Desde cedo as crianças demonstram compreensão das atividades de repartição e distribuição de objetos em partes iguais, não sendo difícil para elas dividir, por exemplo, uma barra de chocolate entre quatro amigos, ou ainda dez rebuçados entre cinco pessoas. É de consenso entre os estudiosos que vem se dedicando às pesquisas na área da Educação Matemática que esses conhecimentos prévios trazidos pelas crianças ao iniciarem suas trajetórias escolares não devem ser ignorados pelos professores, servindo, pelo contrário, de apoio ao processo de ensino-aprendizagem.

Os números racionais são introduzidos no currículo escolar, em geral, logo após o ensino dos números naturais, induzindo, em uma grande parcela dos alunos, uma tentativa de generalização indevida do conhecimento adquirido sobre os naturais para os racionais, uma vez que estes ao apresentarem características próprias com formas de manipulação muito distintas das utilizadas pelos alunos até então, obriga a uma reorganização conceitual em relação aos números inteiros.

Vosniadou e Verschaffel (2004) argumentam que antes de serem apresentados aos números racionais, os estudantes já formaram uma compreensão inicial de número baseado no ato de contar, correspondente ao conceito matemático de número natural, e que esta compreensão constitui um sistema de conhecimento complexo abrangendo uma série de suposições e crenças que subjazem às expectativas dos alunos sobre os números e sobre as operações que com eles podem ser efetuadas. Ao se depararem com os números racionais e suas particularidades, ocorre uma forte ruptura em seu sistema de conhecimento, na qual a concepção inicial que possuem dos números acaba por dificultar a assimilação dos novos conceitos associados aos números racionais, acarretando erros e equívocos no entendimento dos alunos.

De acordo com Wu (2005), a aprendizagem das frações constitui o primeiro contacto dos estudantes com um conteúdo mais abstrato. Até então, ao lidarem com os números naturais, os alunos poderiam usar os dedos para efetuarem contagens; com as frações, é necessário que seus dedos, que representam o concreto, sejam substituídos por outro tipo de construção, por outra imagem mental, que deve permitir o entendimento de que uma fração representa um único número, uma única magnitude. Assim, para que o processo de aprendizagem dos números racionais possa se realizar devidamente, torna-se fundamental que os alunos entendam que $\frac{4}{5}$, por exemplo, representa um número singular, com sua grandeza própria (Quaresma, 2010), e compreendam que:

(i) enquanto os números naturais apresentam uma reduzida forma de representação simbólica, um número racional admite infinitas representações fracionárias, o que conduz à noção de frações equivalentes (p. e.: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$ são representações diferentes de um mesmo número);

(ii) ao comparar frações (p. e.: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$), para estabelecer qual delas é maior não é suficiente o conhecimento dos naturais, sendo necessário entender a fração como um único número, com a sua magnitude própria; em geral, os alunos tendem a aplicar a lógica dos naturais raciocinando erroneamente que se $3 > 2$, logo, $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$;

(iii) diferentemente dos números inteiros, os racionais não admitem um único antecessor nem um único sucessor, ou seja, enquanto entre dois números inteiros não existe outro número inteiro, característica dos conjuntos discretos, entre dois números racionais existem infinitos números racionais, constituindo-se um conjunto numérico densamente ordenado;

(iv) ao contrário dos números naturais (excetuando o 0 e o 1), em que o produto entre dois números resulta sempre em um número maior que os dois fatores, isso nem sempre acontece quando lidamos com os racionais (p. e., $8 \times \frac{1}{4} = 2$);

(v) em geral, as frações são representadas na forma $\frac{a}{b}$ e os estudantes, ao tentarem aplicar os mesmos procedimentos aprendidos com os números naturais em tarefas envolvendo adição e subtração de frações, acabam por cometer erros ao adicionarem numerador com numerador e denominador com denominador (p. e.: $\frac{2}{9} + \frac{3}{5} = \frac{5}{14}$);

(vi) nas representações decimais nem sempre o maior número é aquele que possui mais algarismos (essa noção também vai em sentido oposto ao raciocínio aplicado aos números naturais).

Outra grande barreira para que os alunos alcancem uma real compreensão dos números racionais está relacionada aos diferentes significados que estes possuem. Kieren (1976) foi o pioneiro em catalogar as frações em categorias, as quais denominou subconstructos: razão, operador, quociente e medida (cabe notar que para Kieren o significado parte-todo está implícito em todas essas categorias, não constituindo, portanto, uma categoria individual).

Posteriormente, Behr et al. (1983) fizeram uso das mesmas categorias apontadas por Kieren, porém, destacando o significado parte-todo como um subconstructo diferente:

(i) Relação parte-todo - usualmente apresentado por uma fração representando uma ou mais partes (numerador) de um todo (unidade) que foi dividido em partes iguais (denominador);

(ii) Medida (quantidades contínuas ou discretas) - próximo ao conceito de relação parte-todo, o número racional como medida apresenta a ideia de dividirmos uma unidade em partes iguais e vermos quantas dessas partes caberão naquilo que se quer medir;

(iii) Quociente - presente em situações associadas a ideias de partição, representadas através de uma divisão a: b;

(iv) Razão - relação expressa entre duas quantidades de um par ordenado de números, quantidades ou grandezas;

(v) Operador - no qual o número racional possui um papel de transformação, agindo como multiplicador (e transformador) de uma dada quantidade.

Ao avançarem com as ideias de Kieren, Behr et al. (1983) propuseram um modelo teórico relacionando os diferentes significados das frações às operações com frações, às frações equivalentes e à solução de problemas (figura 1):

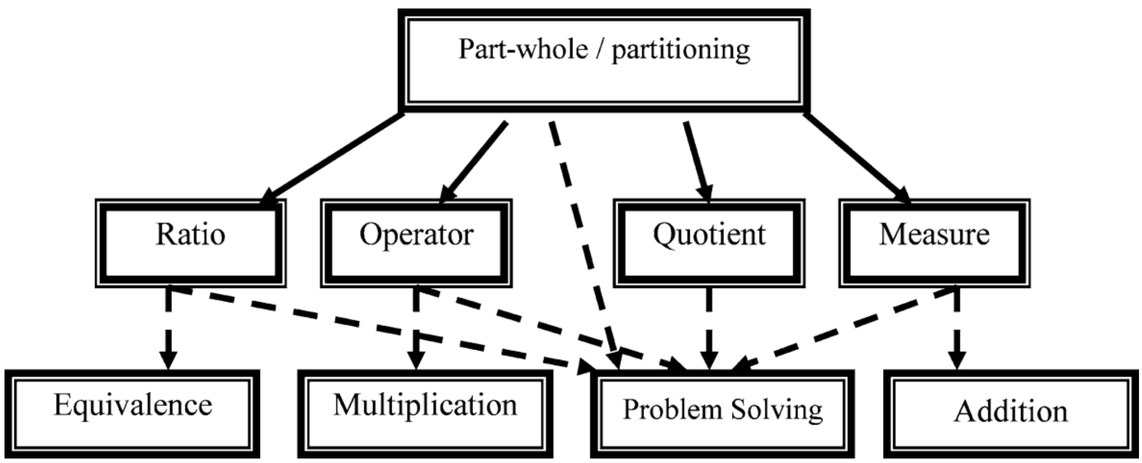


Figura 1. Modelo teórico relacionando os cinco subconstructos das frações às operações com frações e à solução de problemas (Behr et al., 1983)

Partindo do modelo teórico desenvolvido por Behr et al., Charalambous e Pitta (2007) destacam que: (i) o significado parte-todo deve ser considerado um fundamento para o desenvolvimento da compreensão dos demais signifcados, visto ser pertinente aos demais subconstructos; (ii) o subconstructo razão, estando diretamente relacionado ao conceito de equivalência é, consequentemente, o caminho mais adequado para determinar frações equivalentes; (iii) o subconstructo operador é considerado como útil para compreender as operações de multiplicações com frações; (iv) o subconstructo medida é considerado necessário para desenvolver a habilidade nas operações de adição e subtração com frações, e (v) todos os cinco subconstructos são considerados pré-requisitos para a resolução de problemas em todos os domínios das frações.

Ao considerarem os diversos conceitos e o alto grau de complexidade que envolvem os números racionais, Behr et al. (1983) observam que possuir o correto entendimento dos diversos significados e de suas inter-relações permite aos alunos lidar com situações e problemas da vida real de forma prática e com mais fluência, além de possibilitar que desenvolvam as suas capacidades e estruturas mentais, sob uma perspectiva psicológica. Sob um ótica puramente matemática, os autores ponderam que a assimilação apropriada dos números racionais constitui a base para a aprendizagem da álgebra e do desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Tanto para Kieren (1976) como para Berh et al (1983), compreender de forma clara os números racionais requer não apenas o entendimento de cada um desses significados separadamente, mas também de como eles se interrelacionam. Em sua tese de doutoramento, Pinto (2011) destacou que construir o sentido de número racional é um ponto crucial para a correta apropriação dos significados e das operações com esse conjunto numérico, sendo necessário que haja o desenvolvimento integrado de cinco componentes e das respectivas capacidades (figura 2):

SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto	→ Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto	→ Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua) → Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
Familiaridade com diferentes representações de número racional	→ Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto) → Reconhecer frações equivalentes
Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais	→ Representar números racionais na reta numérica → Comparar e ordenar números racionais → Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais
Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais	→ Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais. → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

Figura 2. Modelo para caracterizar o sentido de número racional (Pinto, 2011, pp. 112-113)

Para Romanatto (1999, p.37), "o número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos..."., e

> "...a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são "personalidades" que o número racional assume, representadas por notações da forma a/b, decimal e percentual." (Romanatto, 1999, p.37).

Muitos alunos revelam grande dificuldade na compreensão dos conceitos que envolvem os números racionais, apesar de saberem aplicar e utilizar os algoritmos específicos relativos a esse conjunto numérico (Moss & Case, 1999). A memorização e a repetição sistemática do uso de algoritmos permitem a alguns alunos obterem respostas corretas em situações de cálculo rotineiro, o que pode criar a ilusão de que estes compreendem o que fazem (Monteiro & Pinto, 2005).

Com o objetivo de tentar perceber as razões que levam tantos alunos ao insucesso nesse domínio da matemática, Monteiro e Pinto (2005) realizaram um estudo em Portugal, no qual concluíram que as dificuldades existentes estão relacionadas com: (i) a compreensão da existência de diferentes significados associados às frações; (ii) a concepção da unidade (do "todo"); e, (iii) o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos. Segundo as autoras, em Portugal, em geral, é atribuída demasiada ênfase aos procedimentos e raramente são estabelecidas "pontes" entre procedimentos e conceitos. Essa conclusão também pode, certamente, ser estendida para outros países incluindo o Brasil, onde o conhecimento processual parece ainda ter primazia sobre o conhecimento conceitual.

2.2 - Introdução aos números racionais no currículo escolar: destaque para os significados parte-todo e medida

É inegável que a construção do conceito dos números racionais deve levar em consideração suas diferentes interpretações e significados e que, devidamente inter-relacionados, devem fazer parte do processo de ensino e aprendizagem ao longo do percurso escolar. Porém, tendo em vista o objetivo da minha investigação centrar-se nas operações de adição e subtração dos números racionais na representação fracionária e considerando o modelo teórico apresentado por Behr et al (1983) e as considerações feitas por Charalambous e Pitta (2007) acerca da relação entre os subconstructos e as operações, dois significados passam a ter uma maior relevância para o presente estudo: parte-todo e medida. O primeiro por representar um conceito fundamental para o número racional na forma fracionária e por estar relacionado com os demais subconstructos e o segundo por estar diretamente ligado às operações de adição.

O subconstructo parte-todo pode ser definido como "uma situação em que uma quantidade contínua ou uma quantidade discreta é dividida em partes iguais e é representada com número de partes destacadas do objeto ou do conjunto e a quantidade de partes em que o todo, objeto ou conjunto, foi dividido" (Freire, 2011). Simultaneamente ao processo de partilha equitativa, o significado parte-todo é imprescindível para a compreensão das demais interpretações das frações (Charalambous & Pitta, 2007). Para estes autores, é necessário que os alunos interiorizem certas ideias associadas à relação entre as partes e o todo, tais como: (i) quando tomadas em conjunto, as partes tem que integralizar o todo, (ii) quanto maior o número de partes em que o todo é dividido, menor é o tamanho dessas partes e vice-versa, e (iii) a relação entre as partes e o todo é conservada, independentemente da dimensão, forma, disposição ou orientação das partes equivalentes. Dessa forma, a fração reflete uma comparação entre o número de partes tomadas da unidade e o total de partes em que a unidade foi fracionada; portanto, nesse subconstructo, o numerador da fração será sempre menor ou, no máximo, igual ao denominador. Para Monteiro e Pinto (2005), seja qual for a situação didática, é importante destacar a relação da parte com o todo nos números fracionários, uma vez que o "todo" representa a unidade dividida (Monteiro & Pinto, 2005).

Por sua vez, o subconstructo medida assemelha-se ao conceito da relação parte-todo, ao apresentar a ideia da divisão de uma determinada unidade em partes iguais e verificar quantas dessas partes caberão naquilo que se quer medir. Assim, o número fracionário $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e b não nulo fica associado a um determinado ponto sobre a reta numérica, indicando a medida do segmento desde a origem da reta (número zero) à extremidade relativa a esse ponto específico (Lessa, 2015).

Keijzer (2003) destaca o significado medida como primordial para a devida compreensão dos números racionais, pois, segundo ele, esta abordagem prepara para a representação dos números na reta numérica, evidenciando as frações equivalentes e, consequentemente, promovendo uma abordagem promissora para a adição e subtração de frações (Monteiro & Pinto, 2005).

Lessa (2015) destaca que a necessidade de se efetuar medições conduz intuitivamente ao uso dos números racionais, sendo por vezes mais simples representar a magnitude da medida na forma fracionária do que através de uma representação decimal aproximada (figura 3, com a distância representada por $\frac{7}{3}$ ou $2\frac{1}{3}$ ao invés de 2,333...).

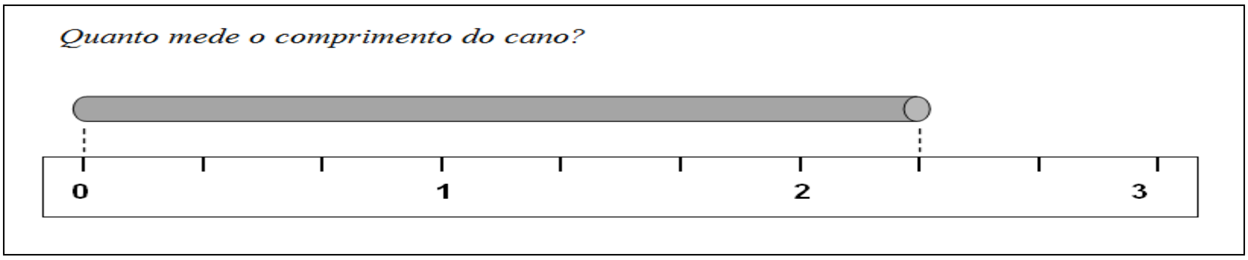


Figura 3 – Atividade sobre Medida (Lessa, 2015)

Na maioria dos países, a introdução aos números racionais nos currículos escolares nos anos iniciais tem privilegiado o significado parte-todo (Charalambous & Pitta, 2007), através da apresentação de figuras representando um todo dividido em partes iguais, com algumas dessas partes pintadas ou hachuradas. Concomitantemente, são apresentados os termos da fração: o total de partes em que o todo foi dividido corresponderá ao denominador e a quantidade de partes pintadas será o numerador da fração, trabalhando-se a partir daí, com a representação $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, sem explorar que essa representação pode assumir diferentes significados dependendo do contexto: além de parte-todo, número, medida, quociente, operador multilicativo (Magina & Campos, 2008).

Essa tendência a enfatizar a relação parte-todo, com a unidade sendo dividida em partes iguais na grande maioria dos exemplos, pode acarretar obstáculos para a compreensão dos demais significados dos números racionais por parte dos alunos, uma vez que poderá influenciá-los a pensar que esta é a única interpretação possível dos números fracionários. Nunes e Bryant (1997) advertem que apesar de ser esta uma das formas mais comuns de apresentar as frações às crianças, através da utilização do registro figural, e por mais que os alunos pareçam dominar bem esse conceito, com o passar do tempo esse entendimento se revela frágil, pois, ao se alterarem alguns aspectos das figuras, como por exemplo, quando o todo não está dividido em partes iguais, os alunos se vêem perdidos e confusos, não sendo capazes de compreender o significado dessa representação.

Behr et al. (1983) sustentam que o modelo parte-todo pode afetar negativamente o entendimento dos alunos sobre as frações como sendo números que formam um conjunto contínuo e que são infinitamente divisíveis, e argumentam que há um consenso entre os pesquisadores de que a forma como se introduz os números racionais, geralmente por meio de uma fração com o significado parte-todo, favorece a um procedimento conhecido como dupla contagem, em que os alunos contam as partes pintadas da figura e a quantidade de partes em que a mesma foi dividida, estabelecendo-os como numerador e denominador, sem perceber a relação existente entre essas partes. Neste mesmo sentido, Kieren (1988) alerta para a fragilidade do significado parte-todo ao não contribuir para a construção do conceito de número racional de forma integral, considerando os diversos significados que este pode assumir, inibindo outras interpretações das frações, como por exemplo, quando a fração dois terços é entendida somente como duas partes de um bolo dividido em três partes iguais, e não como a parte relativa a cada pessoa quando dois inteiros são divididos entre três pessoas (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

De acordo com o *National Mathematics Advisory Panel* (NMAP, 2008), os modelos pictóricos apresentados aos alunos nos anos iniciais enfatizando as frações como sendo partes iguais de um inteiro, acarretam obstáculos aos alunos no momento em que estes se veem expostos às frações impróprias, tais como $\frac{5}{4}$ ou $\frac{9}{8}$, dificultando à sua conceitualização e, consequentemente, as operações numéricas.

De forma a enfrentar essa limitação conceitual, o *National Council of Teachers of Mathematics Standards* (NCTM, 2007) recomenda que, para que os alunos adquiram real e amplo entendimento dos diferentes significados subjacentes aos números racionais, seu ensino deve incorporar a compreensão das frações como parte da reta numérica, a compreensão das relações existentes entre as frações e os números naturais, a equivalência de frações, e a proficiência e a fluência com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com frações próprias, impróprias e números mistos. Por sua vez, o NMAP (2008) recomenda que os alunos devam ser capazes de identificar e representar frações ao fim do 4.º ano, devam ter fluência em comparar, adicionar e subtrair frações ao fim do 5.º ano, multiplicar e dividir frações ao final do 6.º ano e realizar todas as operações com frações positivas e negativas ao término do 7.º ano. No Brasil, objetivando minimizar as possíveis consequências do excessivo destaque dado ao modelo parte-todo na apresentação dos números racionais, os PCNs (1997) sugerem que o trabalho com frações nos anos iniciais seja diversificado, devendo estar presentes, também, os significados medida, quociente e razão, devidamente inseridos no contexto social dos alunos.

Cabe ressaltar que os três documentos citados anteriormente destacam um ponto comum considerado essencial para que se atinja uma maior e mais clara compreensão dos diferentes conceitos inerentes aos números racionais e das relações existentes entre eles: todos recomendam que o processo de ensino-aprendizagem deve se apoiar em um maior desenvolvimento da compreensão conceitual em detrimento da compreensão processual, ainda tão preponderante nas salas de aula atuais.

2.3 - Conhecimento conceitual versus conhecimento processual

Recentes teorias no campo do desenvolvimento numérico indicam que a aprendizagem das frações é de particular importância no currículo escolar, uma vez que propicia uma compreensão mais profunda do sistema numérico, ao introduzir uma série de propriedades não aplicáveis aos números naturais, impulsionando os alunos a reformular e a refinar seus conhecimentos conceituais acerca dos números.

Além disso, os números racionais constituem-se como pré-requisito para a devida compreensão da álgebra que, por sua vez, é um dos fundamentos para as carreiras tecnológicas, de engenharia e matemática de formação superior. Portanto, pode-se prever que alunos que tenham dificuldades nesse domínio experimentam maiores obstáculos para seguir nessa área e, em consequência, constata-se um maior índice de desistência acadêmica em tais carreiras profissionais (NMAP, 2008).

Ainda hoje deparamo-nos com uma prática de ensino que privilegia a aprendizagem de regras e procedimentos rotineiros de cálculos, em detrimento do aspecto conceitual dos conteúdos matemáticos. Consequentemente, as dificuldades dos estudantes com as frações derivam-se da falta de compreensão conceitual que possuem. Muitos alunos veem as frações como símbolos sem sentido, como dois números independentes constituindo o numerador e o denominador, sem estabelecer qualquer relação ou conexão entre eles, não percebendo as frações como um todo unificado, representando uma única magnitude, o que acarreta um entendimento indevido dos símbolos matemáticos, refletindo diretamente nos erros que cometem e, acabam por efetuarem cálculos sem saber a razão, o porquê de fazê-los (Kerslake, 1986).

Segundo Kieren, quando os números racionais são introduzidos aos estudantes, podem não estar sendo suficientemente diferenciados dos números inteiros, negligenciando a importância da relação existente entre os números que compõem a fração (Kieren, 1995). Adicionalmente, a ênfase no conhecimento processual sobre o conhecimento conceitual, muitas vezes sem o devido entendimento do porque os procedimentos funcionam do modo como são efetuados, pode estar contribuindo para a perspectiva dos alunos sobre a falta de sentido da matemática (Siebert & Gaskin, 2006). Considere o seguinte resumo de procedimentos para as operações com frações:

> Quando adicionamos ou subtraímos frações, temos que encontrar o denominador comum, mas não quando multiplicamos ou dividimos. E uma vez encontrado o denominador comum, adicionamos e subtraímos os numeradores, mas não os denominadores, apesar do fato de que quando fazemos a multiplicação, multiplicamos ambos os numeradores e denominadores, e quando fazemos a divisão, não dividimos nem os numeradores nem os denominadores. (Siebert & Gaskin, 2006, p.394)

Essas regras podem fazer sentido para aqueles que já possuem conhecimento conceitual sobre as operações com frações, mas não apoiam alunos que estejam iniciando suas aprendizagens nesse domínio. Infelizmente, os alunos são apresentados a regras básicas de procedimentos que são de difícil compreensão.

O *National Mathematics Advisory Panel* (NMAP, 2008) indica que o desenvolvimento dos conhecimentos conceitual e processual é essencial para o domínio das frações. O conhecimento conceitual considera os conceitos abstratos que regem um domínio e suas inter-relações; refere-se à criação de vínculos entre os conhecimentos prévios dos alunos e as novas informações que estão sendo apresentadas, e implica o reconhecimento das relações e pontos comuns existentes entre eles. Não está ligado a um tipo de problema específico, mas pode ser generalizado para uma classe de problemas (Schneider & Stern, 2010).

Quanto às frações, o conhecimento conceitual inclui comparar e julgar as magnitudes das mesmas, compreender as representações fracionárias e determinar a equivalência de frações (NMAP, 2008). Para Behr et al. (1992), o conhecimento conceitual das frações envolve a compreensão dos seus diferentes significados.

Por outro lado, o conhecimento processual refere-se à capacidade de execução de um conjunto sequencial de passos ou algoritmos com o objetivo de solucionar uma determinada tarefa matemática. Alguns autores consideram este tipo de conhecimento como o conhecimento das representações simbólicas, dos algoritmos e das regras, podendo ser usado com poucos recursos cognitivos (Schneider & Stein, 2010), permitindo que determinados problemas sejam resolvidos de forma rápida e efetiva, ainda que sem o estabelecimento de sua completa compreensão. Em relação às frações, o conhecimento processual envolve utilizar os algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão para solucionar os problemas apresentados.

Byrnes e Wasik (1991) argumentam que muitos alunos aprendem os métodos corretos para fazer as operações com as frações, mas não parecem entender os princípios subjacentes à elas. Por exemplo, um estudante pode dominar o conhecimento dos procedimentos para resolver problemas de divisão de frações, fazendo a inversão dos termos do divisor e, em seguida, multiplicando o divisor invertido pelo dividendo, porém, ao mesmo tempo, pode não ter o conhecimento conceitual que explica por que esse procedimento é matematicamente justificado e por que produz o resultado obtido.

Na literatura podem ser distinguidas três perspectivas sobre as relações desses conhecimentos entre si. Alguns investigadores consideram que as crianças adquirem primeiramente conhecimentos conceituais e, a partir dos mesmos, constroem e aprimoram o conhecimento processual (Geary, 1994). Outros pesquisadores sugerem que as crianças incorporam primeiro os procedimentos sem um claro entendimento dos princípios conceituais que os regem para, em seguida, através da abstração, compreenderem progressivamente as suas bases conceituais (Siegler & Stern, 1998). Há uma terceira corrente que sugere que ambas as formas de conhecimento são adquiridas simultânea e interativamente, de forma a que o incremento de um tipo de conhecimento repercuta positivamente no outro e vice-versa (Rittle-Johnson et al., 2001).

Esses dois tipos de conhecimentos não deveriam evoluir de maneira autônoma, independentes um do outro, uma vez que ambos afetam-se mutuamente. Conhecimento processual sem conhecimento conceitual dificulta o desenvolvimento matemático de uma pessoa (Schwartz, 2008).

> Um dos benefícios de enfatizar mais a compreensão conceitual do que o ensino de procedimentos e regras para a resolução de tarefas, é que uma pessoa tem menos probabilidades de esquecer conceitos do que procedimentos. Se a compreensão conceitual existe, uma pessoa pode reconstruir um procedimento que tenha sido esquecido. Por outro lado, se o conhecimento procedimental é o limite da aprendizagem de uma pessoa, não há como reconstruir um procedimento esquecido. A compreensão conceitual na matemática, em conjunto com a habilidade procedimental, constitui um 'todo' muito mais orgânico e poderoso do que a habilidade procedimental sozinha (Schwartz, 2008, pp 7-8).

Uma prática de ensino direcionada à transmissão de conhecimento processual é uma abordagem centrada no professor e, portanto, relativamente mais fácil de administrar, exigindo menos habilidade do que uma alternativa conceitual. Constitui-se, também, num processo mais fácil de usar ano após ano, haja vista requerer pouca modificação ao longo do tempo em comparação com abordagens alternativas (Schwartz, 2008). Pode ser razoavelmente eficaz para habilitar os alunos – especialmente àqueles dotados com uma boa memória de matemática – para obter altos resultados em testes de matemática num curto prazo, atendendo as expectativas de grande parcela de pais e administradores escolares.

Por outro lado, um processo de ensino orientado para o conhecimento conceitual é uma abordagem centrada no aluno, e objetiva o desenvolvimento das suas competências nas suas relações com as ideias, as imagens, as representações e os símbolos de um determinado domínio, através dos quais ele aprende e atribui uma nova significação para o real. A elaboração de conceitos permite ao aluno vivenciar o conhecimento, elaborar generalizações, buscar regularidades e fazer conexões da dimensão conceitual do conteúdo aprendido numa perspectiva científica, criativa, produtiva.

O tipo de aula planejado é o que determina que tipo de conhecimento está sendo privilegiado. Se o professor opta por uma abordagem voltada para o ensino de procedimentos, o tempo da aula é quase que exclusivamente gasto com os alunos praticando algoritmos e regras de forma mecanizada, com o único objetivo de encontrar os resultados dos problemas propostos. Em contrapartida, se o professor orienta sua aula para a construção de conceitos, o tempo é majoritariamente gasto auxiliando os alunos a desenvolver uma visão matemática mais ampla e aprofundada, através de tarefas e atividades que visam proporcionar aos alunos a geração de novos conhecimentos.

Cabe observar que uma prática de ensino voltada para o desenvolvimento do conhecimento conceitual não exclui, em hipótese alguma, o conhecimento procedimental, o qual deve estar presente nas aulas como uma forma de consolidação do conteúdo ensinado, apesar de não ser o foco principal do processo de ensino-aprendizagem (Schwartz, 2008; Rittle-Johnson et al., 2001).

2.4 – Educação Matemática Realista - EMR (*Realistic Mathematics Education– RME*)

A Educação Matemática Realista (EMR) surge na Holanda no final da década de 1960, através dos estudos de Hans Freudenthal (1905-1990), matemático e educador alemão, reconhecido como seu fundador. Freudenthal e seus colaboradores lançam as bases da EMR como uma reação ao enfoque mecanicista do ensino da matemática vigente à época, consequência direta da disseminação da chamada “matemática moderna” nos currículos escolares nas décadas anteriores aos anos 60.

No início, mais do que ser uma teoria de educação matemática, a EMR consistiu em ideias básicas centradas nas perguntas “como” e “por que” se deve ensinar matemática (van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Desde o seu surgimento até os dias atuais, as bases da EMR vêm incorporando atualizações aos seus fundamentos teóricos, decorrentes dos estudos e das investigações realizadas pelos seus seguidores ao redor do mundo, estando em constante aprimoramento. A EMR está longe de ser um paradigma acabado; trata-se de uma proposta em estado permanente de desenvolvimento e transformação (van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

A EMR possui o objetivo de aprimorar os processos de ensino e aprendizagem da matemática, e apresenta como uma de suas principais características o uso de contextos e modelos como base do processo educativo, visando capacitar os alunos a construírem seus próprios conhecimentos e alcançarem uma melhor compreensão dos conteúdos ensinados.

Uma das ideias centrais da EMR é a de que o ensino da matemática deve estar conectado à realidade, permanecendo próxima aos alunos, e que deve ser relevante para a sociedade, constituindo-se um valor humano. É importante que os alunos tenham contacto com o 'fazer matemático' e devem aprender os tópicos através do desenvolvimento e da aplicação de conceitos e ferramentas matemáticas em situações e problemas do cotidiano que façam sentido para eles. Com base nessa ideia estruturante, o uso de contextos realistas se converteu em uma das características determinantes dessa abordagem educacional.

A EMR encontra-se baseada em seis princípios fundamentais:

- Princípio da Atividade – a matemática é uma atividade humana, e tem a finalidade de matematizar (organizar) o mundo que nos rodeia, incluindo a própria matemática; os alunos são participantes ativos no processo educativo e a aprendizagem está diretamente ligada ao 'fazer'. Para Freudenthal, "a matemática como atividade humana",

> É uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Este pode ser um assunto da realidade, que deve ser organizado de acordo com modelos ou padrões matemáticos, caso os problemas da realidade devam ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, com resultados novos ou antigos, de sua propriedade ou de outros, que deve ser organizado de acordo com novas ideias, para ser mais bem compreendido, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática (Freudenthal, 1971, pp. 413-414);

- Princípio da Realidade – o processo de ensino e aprendizagem das matemáticas deve se dar com o uso de contextos reais, que podem envolver tanto situações-problemas do cotidiano, como situações-problemas reais nas mentes dos alunos; uma vez que os contextos são significativos para os alunos, funcionam como ponto de partida da atividade matemática dos estudantes, e promovem o uso do sentido comum e das estratégias informais, com o objetivo final de alcançar níveis mais elevados de formalização.

- Princípio dos Níveis – os estudantes passam por diferentes níveis, formais e informais, de compreensão: (i) situacional (no contexto da situação); (ii) referencial (esquematização através de modelos, descrições, etc.); (iii) geral (exploração, reflexão e generalização); e, (iv) formal (padronização de procedimentos e notações convencionais); para que ocorra a passagem de um nível para outro é necessário que os modelos utilizados em uma determinada situação mudem de 'modelo de' para um 'modelo para', aplicável a todas as situações equivalentes à original;

- Princípio da Reinvenção Guiada – processo de aprendizagem que permite reconstruir o conhecimento matemático formal sob a orientação e mediação do professor, cabendo a este criar um ambiente em sala de aula propício a que os próprios alunos construam seus conhecimentos; os alunos passam a ser os protagonistas do processo de aprendizagem, reinventando suas ferramentas e seus procedimentos e conceitos matemáticos;

- Princípio da Interação – o ensino das matemáticas é considerado uma atividade social, na qual a interação entre os estudantes e os professores, e dos estudantes entre si, pode provocar a reflexão individual e coletiva a partir da troca de experiências com os demais, impulsionando, assim, o alcance de níveis mais altos de compreensão;

- Princípio da Interconexão – os blocos de conteúdos matemáticos (números, álgebra, geometria, etc.) não podem ser tratados como entidades separadas; os alunos devem perceber a Matemática de forma integrada, onde os diversos conteúdos matemáticos estejam inter-relacionados.

De acordo com Freudenthal, "não existe matemática sem matematização" e, sendo assim, o 'fazer matemático' deve ser entendido, essencialmente, como uma atividade estruturante ou organizadora da prática de matematizar, devendo estar ao alcance de todos os seres humanos (Freundenthal, 1973). A matematização constitui o núcleo da Educação Matemática, e tem o seu foco voltado para a própria atividade e para os efeitos gerados por ela (Freudenthal, 1991). A Educação Matemática deve ter por objetivo, acima de tudo, matematizar a realidade cotidiana (van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Para Freundenthal, “matematizar é organizar a realidade por meios matemáticos... incluindo a própria matemática” (1973, p. 44), e, ainda, “o que as pessoas têm que aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematizar a realidade e, se possível mesmo, de matematizar a matemática” (1968, p. 7).

Matematizar é, portanto, uma atividade de busca e de resolução de problemas, além de ser também uma atividade de organização de um determinado tema. É um processo que envolve: (i) reconhecer características essenciais em situações, problemas, procedimentos, algoritmos, formulações, símbolos e sistemas axiomáticos; (ii) descobrir características comuns, semelhanças, analogias e isomorfismos; (iii) exemplificar ideias gerais; (iv) encarar situações problemáticas de maneira paradigmática; (v) o surgimento repentino de novos objetos mentais e operações; (vi) procurar atalhos e abreviar estratégias e simbolizações iniciais com o intuito de esquematiza-las, algoritmiza-las, simboliza-las e formaliza-las; e, (vii) refletir acerca da prática de matematizar, considerando os fenômenos em questão, a partir de diferentes perspectivas (Freundenthal, 1991, p. 30, pp. 35-36).

Freudenthal adotou a ideia formulada por Treffers (1987) da coexistência de dois conceitos de matematização no contexto educacional: a horizontal e a vertical. De forma sucinta, a matematização horizontal pode ser entendida como uma tarefa de tornar mais acessível um assunto para tratamento matemático, através do uso de ferramentas matemáticas utilizadas para organizar e resolver um problema da vida diária; quanto a matematização vertical, esta pode ser definida como uma tarefa de promover um processamento matemático mais sofisticado, através de reorganizações e operações feitas pelos estudantes dentro do próprio sistema matemático.

Para Freudenthal (1991), matematizar horizontalmente significa passar do mundo real ao mundo dos símbolos, convertendo um problema contextual em um problema matemático, com base na intuição, no senso comum, na aproximação empírica, na observação e na experimentação indutiva; e matematizar verticalmente significa transitar dentro do mundo dos símbolos, descobrindo relações entre conceitos e estratégias, o que implica o uso de técnicas de reflexão, esquematização, generalização, prova, simbolização e rigor, objetivando alcançar níveis maiores de formalização, ainda que, na prática, possa ser difícil perceber claramente as diferenças entre esses dois tipos de matematização.

Por sua vez, Treffers (1987) conceitua a matematização horizontal como uma tentativa de dar forma a um problema, estruturando-o matematicamente, seja por meio da elaboração de um modelo, ou de esquemas ou símbolos. Quanto à matematização vertical, para o autor esta engloba as tarefas relacionadas ao processo matemático em si, à solução do problema, à generalização da solução e, por fim, à formalização.

De acordo com Freundenthal (1991), as estruturas matemáticas não devem ser entendidas como algo fixo, imutável; estas estruturas emergem e se expandem continuamente nos processos de aprendizagem individuais e coletivos. Em outras palavras, na EMR os estudantes tem participação ativa no processo de ensino e aprendizagem que ocorre no contexto social da sala de aula, não sendo meros receptores e, consequentemente, reprodutores de um ensino mecanizado.

Dentre as ideias preconizadas pela Educação Matemática Realista, denominadas por Freundenthal como “ferramentas conceituais para uma teoria da educação matemática”, destacam-se o uso de contextos e situações-problemas realistas e a utilização de modelos para representar e organizar estes contextos e situações-problemas.

2.4.1 - O uso de contextos e situações-problemas realistas

Segundo Freundenthal, “um contexto é o domínio da realidade que, em um processo particular de aprendizagem, é revelado ao aluno para que este o possa matematizar” (1991, p. 73). Nesse sentido, para que a utilização dos contextos seja eficaz, os mesmos devem ter como características: ser representáveis, lógicos e poderem ser imagináveis para os alunos, uma vez que são geradores de suas atividades matemáticas.

Os contextos possuem um papel essencial no processo educativo, uma vez que, sendo bem escolhidos e aplicados, revestem-se de interesses para os alunos e constituem-se em objetos de trabalho, servindo de ponto de partida para a produção matemática e para os domínios de aplicação da mesma, tornando os conteúdos matemáticos acessíveis e permitindo que os estudantes trabalhem em diferentes níveis de conceitualização com base nas suas possibilidades individuais, mobilizando seus conhecimentos informais e favorecendo a criação de modelos. Além disso, por serem geralmente abertos, admitem estratégias de resolução variadas, estimulando valiosas discussões matemáticas entre os alunos (Bressan et al., 2016).

Cabe ressaltar que a palavra "realista" não deve ter uma conotação restritiva, ligando-se tão somente a fenômenos ocorridos no mundo real, uma vez que este entendimento limitaria as oportunidades para que os alunos aprendam a operar dentro da própria matemática. Para o GEPEMA – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação da Universidade Estadual de Londrina, a tradução mais apropriada para o termo "realistic", seria realístico, ao invés de realista, uma vez que seu significado estaria mais vinculado ao sentido de "imaginar", "fazer ideia", "tomar consciência de", denotando contextos que não tenham a necessidade de serem "autenticamente reais", mas imagináveis, realizáveis, concebíveis para os alunos (Ferreira & Buriasco, 2016).

Se, por um lado, o adjetivo "realista" está relacionado diretamente e em definitivo com a forma como o ensino e a aprendizagem da matemática são vistos na EMR, por outro lado, este termo refere-se mais a intenção de oferecer aos alunos situações-problemas que possam ser imaginadas por eles, do que referir-se simplesmente à realidade ou à autenticidade dos problemas. Dessa forma, situações que apresentem elementos não relacionados diretamente ao mundo real como, por exemplo, o mundo da fantasia (representando um contexto artificial), o mundo virtual, e até mesmo o mundo formal da matemática, podem servir de contextos adequados para a elaboração de problemas e tarefas, uma vez que são reais nas mentes dos estudantes. Contextos puramente matemáticos podem e devem ser utilizados, desde que façam sentido para os alunos como, por exemplo, jogos ou desafios, tais como: completar cadeias de operações numéricas buscando relações entre os números que as integram, buscar regularidades em tabelas, etc.

Na Educação Matemática Realista, os contextos são usados não somente para ilustrar a aplicabilidade e a relevância da matemática em situações do mundo real, mas também como uma fonte para a aprendizagem da própria matemática. Quando os alunos aprendem com situações contextualizadas e com modelos próprios desenvolvidos para a aprendizagem significativa, e não apenas a um nível puramente abstrato, eles estarão usando a matemática para resolver problemas de forma efetiva e com compreensão, muito mais do que simplesmente aplicar técnicas matemáticas (algoritmos e procedimentos). O mais importante na utilização dos contextos, sejam eles relacionados ao cotidiano, a ficção ou, ainda, a própria área da matemática, é que estes sejam suficientemente reais para os alunos, que façam sentido para eles. Dessa forma, os alunos se sentirão “dentro” do contexto e, com isso, serão estimulados a desenvolverem mais seus raciocínios matemáticos.

A escolha dos contextos impõe-se, portanto, como uma decisão de fundamental importância, e devem levar em consideração que contextos bem escolhidos são aqueles que incentivam os alunos a utilizarem diferentes estratégias na busca de solução para um determinado problema, além de promoverem o refinamento progressivo de suas linhas de raciocínio ao estabelecer conexões com os seus conhecimentos prévios. Em geral, os contextos apresentam mais informações do que o necessário para solucionar as tarefas propostas, aproximando-os muito mais dos problemas encontrados no mundo real do que as questões frequentemente encontradas nos manuais escolares, onde todas as informações fornecidas pela questão devem ser usadas de alguma forma.

2.4.2 - O uso de modelos como ferramentas para representar e organizar os contextos e situações-problemas

As representações visuais, tais como gráficos, diagramas e desenhos, encontram-se onipresentes na Matemática. Durante todo o percurso escolar, desde os anos iniciais até os graus superiores, o ensino da disciplina está fortemente ancorado na utilização dessas representações, seja atuando como "porta de entrada" para a apresentação de novos conceitos, seja com o intuito de aumentar a compreensão acerca de um determinado conteúdo ou, ainda, para comprovar resultados (Mumma & Panza, 2012, p.1), constituindo-se, dessa forma, como uma eficiente estratégia no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Para a Educação Matemática Realista, os modelos são representações de situações problemas e devem necessariamente refletir aspectos essenciais dos conceitos e estruturas matemáticas que são relevantes para o problema. Materiais concretos, esboços visuais, esquemas, diagramas, situações paradigmáticas e até mesmo símbolos podem servir como modelos (Treffers, 1987, 1991).

Um modelo emerge de um contexto específico, estando, de início, estritamente relacionado à situação que o originou. Porém, com o seu aprimoramento, progressivamente vai se afastando da situação inicial até adquirir o caráter de um modelo formal e, portanto, generalizável e aplicável a outros contextos e situações, passando assim de 'modelo de', relativo a uma situação particular, a 'modelo para', configurando o raciocínio matemático em situações diversas, tanto fora como dentro da própria matemática. "O modelo é simplesmente um intermediário, muitas vezes indispensável, através do qual uma realidade ou teoria complexa é idealizada ou simplificada a fim de torná-la suscetível a um tratamento matemático formal" (Freundenthal, 1991, p. 34).

Os modelos devem superar a lacuna entre o informal e o formal, permitindo que os alunos trabalhem em diferentes níveis de abstração; portanto, aqueles que tenham maiores dificuldades com noções mais formais, ainda assim podem fazer progressos e criar estratégias para resolver problemas (Treffers, 1991; Bressan, et al., 2016).

Para além de serem representações de contextos, os modelos na EMR também são entendidos como objetos de trabalho e reflexão em si mesmos, sobre os quais se realizam ações e operações que permitem visualizar, explicar, comparar, contrastar e comprovar relações nos domínios que estão sendo estudados. Para isso, os modelos precisam satisfazer as seguintes condições (Bressan et al., 2016):

(i) devem estar enraizados em contextos realistas, imagináveis;

(ii) precisam ter flexibilidade suficiente para que possam ser aplicados em um nível mais avançado ou mais geral, e podem transformar-se com o tempo ajustando-se às particularidades das situações; devem apoiar a progressão na matematização vertical sem bloquear a possibilidade de regressar às situações iniciais à partir da qual uma estratégia se originou, quer dizer, os alunos devem sempre poder voltar a níveis anteriores;

(iii) devem ser viáveis, ajustando-se às estratégias informais dos alunos e ser facilmente adaptáveis a outras situações; assim, o aluno passa a ser o "gestor" do modelo, reinventando-o sempre que necessário.

Por suas características, os modelos exercem um papel de fundamental relevância ao revelarem como os alunos interpretam as tarefas propostas e suas linhas de raciocínio, além de fornecerem indicações importantes para a compreensão dos erros cometidos, constituindo-se, portanto, em ferramentas de grande utilidade para a clarificação, articulação, justificação e comunicação dos alunos (Treffers, 1991).

É importante para o desenvolvimento matemático dos alunos que estes reconheçam que um mesmo modelo pode ser usado em uma variedade de situações e que pode estruturar solução para muitos tipos de problemas (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

A busca de contextos e modelos que originam à matematização, corresponde ao que Freundenthal denominou 'fenomenologia didática', que consiste em investigar, primeiramente, as diversas manifestações e usos de um determinado objeto matemático na realidade (tais como as frações, as razões, as funções, os ângulos, etc.), considerando suas referências na linguagem cotidiana (o que queremos dizer quando falamos de frações, razões, funções, ângulos, etc.) e, a partir disso, construir a didática desse tema (Freundenthal, 1983).

Dentre os modelos testados em salas de aula pela própria EMR, e considerados como de fácil introdução a partir de situações contextuais e passíveis de serem recriados pelos alunos, encontram-se materiais didáticos manipuláveis, esquemas (modelo de barras, modelo circular, tabela de razões), diagramas (por exemplo, o diagrama de árvore), modalidades de notações (como as flechas) e os procedimentos simbólicos (como os algoritmos e as fórmulas) (Bressan et al., 2016; Treffers, 1991).

O que torna um modelo eficaz para a aprendizagem é a forma consistente e sistemática como este é trabalhado. Cada nível de ensino aborda operações e relações numéricas distintas, e os modelos devem servir para auxiliar os alunos a visualizar e a resolver problemas, dos mais simples aos mais complexos.

É importante ressaltar que qualquer modelo tem que ser construído a partir dos conhecimentos prévios dos estudantes, e devem levar em consideração seus conhecimentos de partição, ampliação, etc. Esse requisito significa que, por um lado, o modelo a ser utilizado tem que ser concreto para os estudantes no sentido de ser imaginável e autoexplicativo, e por outro lado, deve ser flexível como são os próprios números racionais (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Os manuais escolares muitas vezes introduzem os números racionais através de representações circulares divididas em partes iguais, onde as partes pintadas ou sombreadas representam o numerador e o total de partes em que o círculo foi dividido representa o denominador. Porém, esse tipo de modelo circular pode revelar-se um modelo impreciso e, quando colocado em prática, passível de acarretar algum constrangimento ao processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que pode representar uma maior dificuldade para que os círculos sejam divididos em tamanhos iguais, levando os estudantes a focar mais no número de partições e menos na congruência das partes. A menos que as tarefas propostas considerem apenas metades e quartas partes para que os alunos dividam círculos uniformemente, nas demais frações (terços, quintos, sextos, etc.), as divisões parecem ser altamente problemáticas (Bruce et al., 2013).

Segundo Bruce et al. (2013), no Canadá, apesar dos estudantes utilizarem representações circulares ao estudarem frações nos anos iniciais, o conceito de área do círculo não é formalmente abordado até os anos intermediários, dificultando a sua partição em partes iguais. Essa observação pode ser estendida para o Brasil e diversos outros países, favorecendo a criação de uma situação particularmente complexa, em que os alunos são obrigados a usar a construção da área de um círculo para efetuar as partições necessárias, ainda que não tenham sido expostos formalmente às propriedades da área do círculo (Watanabe, 2012).

2.4.3 – O modelo linear de barras

Em minha investigação, para apoiar a experiência de ensino e as resoluções das tarefas propostas optei por utilizar o modelo linear de barras, por entender ser este um modelo de visualização e assimilação mais acessível para os alunos, constituindo-se um dos modelos mais próximos da representação física dos objetos do cotidiano, e que favorece ao estabelecimento de relações entre as diversas representações dos números racionais (van Galen et al., 2008).

É, portanto, um modelo de fácil utilização, tanto para desenhar como para dividir e representar números maiores e relações de proporcionalidade, sendo uma extensão de materiais já utilizados por alguns professores, como, por exemplo, tiras de frações e réguas, podendo ser aplicado a situações mais complexas (Middleton et al., 1998), além de constituir uma das mais poderosas representações das frações para a construção da compreensão do significado parte-todo e do tamanho relativo das frações, e contribuir fortemente para o entendimento das operações de adição e subtração de frações.

A barra pode ser facilmente dividida em frações de referência, tais como $\frac{1}{2}\ e\ \frac{1}{4}$. Nos exemplos de um meio e um quarto, a simetria das barras permite o desenvolvimento de estratégias conceituais que fazem uso da divisão pela metade repetidas vezes, fornecendo um indicador visual do tamanho relativo dessas frações (van Galen et al., 2008) e podem ser facilmente situadas em um contexto em que os estudantes tanto possam entender intuitivamente como podem aceder experimentalmente ao conceito implícito através da partição de barras de chocolate, da medição ou da distância, por exemplo.

Em geral, o Modelo de Barras é uma forma de dar significado a partir de representação pictórica para o que está sendo apresentado de forma retórica em um problema que envolve raciocínios aritmético e algébrico, particularmente relevante para a resolução de problemas envolvendo frações (Rangel et al., 2017), possibilitando aos estudantes acesso imediato ao sentido de número através do aspecto visual, além de atuar como uma ferramenta flexível para aqueles que tenham um pensamento mais simbólico. No decorrer do processo de aprendizagem, o modelo de barras passa de uma representação concreta e contextualizada para uma representação mais abstrata, que auxiliará os alunos a escolherem os procedimentos de cálculo necessários para solucionar uma tarefa (Ventura, 2013).

É um modelo que fornece, portanto, uma base para o desenvolvimento de rotinas conceituais para a estimativa e para o efetivo cálculo, e oferece uma verificação rápida sobre a razoabilidade das respostas encontradas (Ventura, 2013). Em outras palavras, o modelo de barras possui uma característica fundamental de apoiar e promover a exploração dos processos do *fazer* matemático pelos estudantes, através da visualização direta de uma determinada situação-problema. Quando a estrutura de um problema é reconhecida, a representação formal das relações envolvidas pode ser construída. De acordo com Koleza (2015),

> Partindo de tarefas significativas, os alunos podem construir significados pessoais através do uso do modelo de barras. Numa fase inicial, o modelo de barras funciona como modelo da estrutura matemática de uma determinada situação-problema. Posteriormente, através de um processo de matematização vertical, ao refletirem sobre suas ações representadas em um diagrama e os efeitos dessas ações, os estudantes podem generalizar e abstrair essas ações para resolver, com sucessos, problemas que apresentem estruturas semelhantes. Dessa forma, o modelo de barras torna-se, para esses alunos, um modelo para a estrutura matemática. O modelo de barras é particularmente útil para problemas que envolvam comparações, parte-todo, razão e proporção (Koleza, 2015, p. 1941).

O modelo de barras é, portanto, um método sistemático de ilustração de problemas e de relações numéricas, através do qual se representam as relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas, e para resolver problemas relacionados a essas quantidades (Clark, 2004).

Para ilustrar a eficácia do modelo de barras no apoio à solução de problemas envolvendo os números racionais, segue uma questão proposta pelo Clube de Matemática – OBMEP (Rangel et al., 2017), e adaptada por mim para este estudo. Como parâmetro de comparação, é apresentada, também, sua solução algébrica.

Ao sair para trabalhar, D. Joana deixou um pacote de rebuçados para seus três filhos, com a recomendação de que fossem divididos igualmente pelos três. Ao chegar, o primeiro filho pegou a terça parte do que lhe cabia e saiu. Em seguida, o segundo filho chegou e, pensando que fosse o primeiro, pegou a terça parte dos rebuçados que havia e saiu. Mais tarde, o terceiro filho encontrou 16 rebuçados. Acreditando que fosse o segundo, pegou metade e saiu. Quantos rebuçados a mãe havia deixado para os três filhos ?

Quadro 1– Divisão de rebuçados – Resolução algébrica versus modelo de barras

<table>
<tr><th>Resolução Algébrica</th><th>Resolução pelo Modelo de Barras</th></tr>
<tr><td>
Total de Rebuçados = x

1.º filho = $\left(x - \frac{1}{3}x\right)$

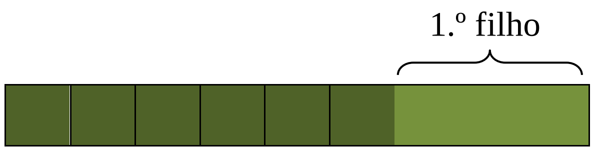
2.º filho = $\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right)$

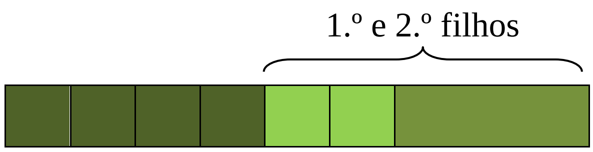
Logo, $\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}x\right)\right] = 8$

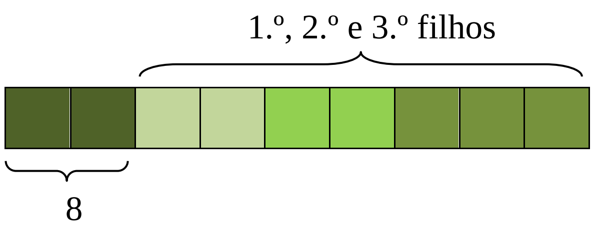
Ou, $\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)\right] = 8$

Portanto, $x = 36$ rebuçados
</td><td>
Total de Rebuçados:

Partição Equitativa:







Solução: 4 x 9 = 36 rebuçados
</td></tr>
</table>

A análise das duas estratégias acima apresentadas indica que a resolução do problema com a utilização do modelo de barras parece ser bem mais simples que a resolução algébrica, pois, nessa fase escolar, em geral, os alunos não possuem a capacidade de entendimento necessária que lhes possibilite resolver o problema recorrendo à abordagem algébrica (Rangel et al., 2017).

Pelo modelo de barras, a quantidade total de rebuçados deixada pela mãe está representada pela barra (a incógnita, o “x” da linguagem algébrica”). De acordo com as informações contidas no problema, a barra vai sendo devidamente dividida, possibilitando a identificação das quantidades de rebuçados que cada irmão pegou, até se chegar à solução pretendida.

Rangel et al. (2017) argumentam que para que um problema seja corretamente resolvido é preciso que sejam seguidos alguns passos: é fundamental que se tenha capacidade de leitura para que se compreenda o que se lê, possibilitando, assim, que seja estabelecida uma estratégia de resolução, para, em seguida, serem efetuados os cálculos necessários e verificada a solução encontrada. Pela resolução apresentada no exemplo anterior, observa-se que o modelo de barras abrange todos os passos indicados, estando presente desde o início do processo de resolução, pela compreensão do que se lê, passando pela construção da estratégia, até a efetivação do processo de cálculo.

Os autores observam, porém, que deve se considerar o modelo de barras como um estágio inicial para o desenvolvimento de um raciocínio algébrico, devendo os alunos ser encorajados a também construir a linguagem algébrica, representando e solucionando os problemas dessa forma (Rangel et al., 2017). Portanto, é importante que, ao solucionar um problema através da representação visual, progressivamente se vá apresentando outros tipos de representações aos alunos, especialmente a representação simbólica, de forma a conduzi-los à construção do raciocínio algébrico, indispensável para o avanço na matemática.

Outro fator determinante para a escolha do modelo linear de barras como instrumento didático para a minha proposta de ensino, reside no fato de que este vem a ser um modelo tradicionalmente utilizado em Singapura, país que tem, ano após ano, liderado os rankings dos exames internacionais, tais como o PISA e o TIMSS.

Ao considerar e perspectivar historicamente as enormes dificuldades com que uma parcela considerável dos nossos alunos lidam com os números racionais, especialmente em sua representação fracionária, e ao pesquisar a abordagem didática utilizada em Singapura, algumas questões se impuseram de imediato para mim, tornando-se fonte de inspiração para a realização da investigação proposta na busca de respostas para as questões e objetivos do meu estudo: (i) o quão efetivo esse modelo se revelaria ao ser aplicado em uma cultura com características tão diversas a de Singapura para apresentação dos conceitos inerentes aos números fracionários ? (ii) como reagiriam os alunos ao serem expostos a uma abordagem didática diferenciada da que estão acostumados, em geral apoiada na utilização de algoritmos, para a apresentação dos conceitos de equivalência, comparação, adição e subtração dos números fracionários ?

2.4.4 – O uso do modelo linear de barras em Singapura

Singapura é uma Cidade-Estado insular localizada no Sudeste Asiático, constituída por 63 ilhas. Em relação à Educação, divide-se em três níveis: primário (duração de seis anos, sendo este o único efetivamente obrigatório), secundário (com duração de quatro anos) e pré-universitário (de dois a três anos).

A partir dos anos 80, o ensino da Matemática passa a fundamentar o seu currículo na resolução de problemas, realçando a valorização das diferentes estratégias usadas pelas crianças para solucionarem as tarefas propostas. Ao tornar-se o centro da atividade matemática, a resolução de problemas passou a destacar cinco componentes básicos interligados em seu desenvolvimento: os conceitos (compreensão conceitual), as competências (habilidades), as atitudes, a metacognição e o processo, constituindo uma proposta coesa de currículo escolar, conforme demonstrado no diagrama seguinte:

Figura 4: Diagrama - Matemática em Singapura – fonte: https://www.moe.gov.sg/docs

De forma a apoiar o novo currículo, é utilizada uma abordagem didática conhecida como “CPA” (Concreto-Pictórico-Abstrato) e que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner. Inicialmente, os conteúdos matemáticos devem ser introduzidos partindo do concreto, sendo importante que as crianças utilizem materiais manipuláveis (tais como, blocos lógicos, barras de Cuisenaire, cromos, objetos ou fotografias de objetos de uso pessoal, tais como, pizzas, barras de chocolate, etc) para que possam perceber que a Matemática se relaciona efetivamente com o seu meio ambiente e serve para resolver problemas da vida real (Teixeira, 2015).

Em seguida, na fase do pictórico, busca-se representar visualmente os materiais concretos com que trabalharam, estimulando as crianças a fazerem uma conexão mental entre o objeto físico que acabaram de manipular e as figuras, diagramas ou modelos abstratos que representam os objetos do problema, tornando-o, por conseguinte, mais acessível. Finalmente, chega-se ao estágio abstrato a partir do qual são apresentados aos alunos os símbolos matemáticos que passarão a ser utilizados para a modelagem dos problemas. Somente quando os alunos demonstrarem plena compreensão dos estágios concreto e pictórico do problema, é que passam a fazer uso efetivo dos símbolos. Cabe observar que a comunicação matemática perpassa todos os estágios de desenvolvimento, uma vez que serve para apoiar a progressão dos alunos entre as diferentes fases de desenvolvimento (Teixeira, 2015).

Respaldada pelos ótimos resultados obtidos por Singapura em exames internacionais, normalmente no topo dos rankings de classificação (PISA, 2015; TIMSS, 2011, 2015, para citar apenas os mais recentes), esta nova abordagem didática tornou-se conhecida mundialmente como o "Método de Singapura", o qual, além das características comentadas anteriormente, apoia o desenvolvimento dos seus processos de ensino e aprendizagem em uma espiral de conceitos, competências e processos, onde "ao longo do seu percurso escolar, o aluno tem a oportunidade de trabalhar um mesmo tema mais do que uma vez, explorando múltiplas representações segundo diferentes níveis de profundidade" (Teixeira, 2015).

Uma das particularidades da abordagem didática de Singapura refere-se à forte utilização da componente visual em seu desenvolvimento, destacando-se a utilização do modelo de barras a partir do 2.º ano do ensino básico e estendendo-se por todo o percurso escolar, tanto na sala de aula como nos manuais escolares, que introduzem os conteúdos de forma direta, concisa e com forte utilização de desenhos e diagramas para ilustrar os problemas apresentados. Recorre-se continuamente ao mesmo tipo de representação visual como apoio para diferentes tipos de situações e em todos os níveis de ensino, auxiliando os alunos a visualizarem as situações dos problemas e a elegerem estratégias de solução justificadas em sólidas bases conceituais, incluindo as operações de cálculo necessárias (Beckmann, 2004). A utilização intensiva dos mesmos tipos de modelos no processo de ensino-aprendizagem confere aos alunos uma maior segurança e a possibilidade de reconhecer padrões, fazer generalizações e desenvolver habilidades de manipulação numérica através do cálculo mental, favorecendo a transição do concreto para o abstrato através da resolução de problemas.

De acordo com o documento *Mathematics Syllabus – Primary One to Five* (2012), emitido pelo Ministério da Educação de Singapura, os modelos são representações de situações da vida real, e permitem que os estudantes: (i) façam as conexões entre os conceitos matemáticos aprendidos e a realidade, (ii) melhorem a compreensão de conceitos e métodos essenciais da Matemática e (iii) desenvolvam suas competências matemáticas, possibilitando com que lidem com uma maior variedade de problemas.

Cabe observar que a utilização do modelo linear de barras não é de uso exclusivo de Singapura, apesar desse modelo constituir, no país, uma abordagem didática de uso contínuo e sistemático durante quase todo o percurso escolar dos alunos. O seu uso também pode ser constatado em outros países, incluindo o Brasil e Portugal, tanto em salas de aula como em manuais escolares, muito embora sem a mesma intensidade e constância que em Singapura.

2.5 – Operações e resoluções de problemas com números fracionários apoiadas no modelo linear de barras

O Modelo de Barras possibilita aos alunos perceberem de forma mais fácil e direta os conceitos inerentes aos conteúdos estudados, sem recorrer de imediato às notações matemáticas e ao uso de algoritmos que, por sua vez, poderia exigir dos alunos, num primeiro momento, uma considerável capacidade de abstração e de compreensão simbólica, dificultando a correta apropriação dos conceitos. Através da representação visual, os alunos podem conseguir uma percepção mais clara dos problemas propostos, desde os mais elementares até os mais avançados e complexos, dos dados que estão sendo fornecidos pelos problemas e àqueles que se pretende descobrir, facilitando a decisão dos alunos quanto a escolha das estratégias a que irão recorrer para solucioná-los (Emeny, 2014).

Utilizei o modelo linear de barras para apoiar o processo de ensino e aprendizagem dos tópicos: equivalência, comparação, adição e subtração de frações, através de tarefas desenvolvidas e aplicadas a alunos do 5.º ano do ensino básico. Apesar do objetivo da investigação ter como foco principal a adição e subtração de números fracionários, entendi ser necessário dar início a Unidade de Ensino com tarefas envolvendo os conceitos de equivalência de frações, de forma a desenvolver e/ou consolidar a necessidade de trabalhar com denominadores comuns, conceito indispensável para adicionar e subtrair frações e, na sequência, apresentar tarefas sobre comparação de frações.

2.5.1 – A compreensão do conceito de unidade (do “todo”) nos números fracionários

Dentre os conceitos relacionados aos números racionais, é fundamental que as frações sejam compreendidas como partes de uma unidade e, por extensão, é necessário que os alunos identifiquem essa unidade de forma clara. Para Monteiro e Pinto (2007), para que isso aconteça os alunos precisam estar atentos para o “todo” a que a fração faz referência, sendo útil que esse “todo” seja apresentado em situações e contextos diversos, possibilitando uma maior apropriação do conceito de unidade. Não perceber claramente à unidade de referência ao se trabalhar com os números fracionários, pode provocar diversos equívocos, sobretudo quando o ensino está fundamentado mais nos conhecimentos processuais do que nos conhecimentos conceituais.

> Uma das maiores dificuldades inerentes ao estudo das fracções prende-se com a questão da unidade tomada como o todo a ser fraccionado. Metade de um quilo de laranjas não é o mesmo que metade de uma dúzia de ovos, ou um terço de uma folha de papel A4 não é o mesmo que um terço de uma folha A5 (Monteiro & Pinto, 2007).

Auxiliar os estudantes a identificarem a unidade e conectá-la com a parte fracional é um ponto fulcral para o desenvolvimento e aprofundamento da compreensão do significado das frações, além de estabelecer bases mais sólidas para o futuro trabalho de cálculo a ser efetuado. Segundo o *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM), “compreender uma fração $\frac{1}{b}$ como sendo a quantidade formada por uma parte quando um inteiro é dividido em b partes iguais; e, entender uma fração $\frac{a}{b}$ como a quantidade formada por a partes de tamanho $\frac{1}{b}$” (3, NF.1, p. 24), é uma das primeiras metas a ser alcançada pelos alunos aos serem introduzidos às frações.

Para Battista (2011), é imprescindível que os estudantes compreendam os processos de partição e iteração dos números fracionários e as relações existentes entre eles, haja vista constituírem processos inter-relacionados que permitem aos estudantes aplicar e desenvolver seus conceitos de unidade para uma fração: enquanto a partição é derivada do inteiro, ao dividi-lo em partes iguais, a iteração inicia com a parte, repetindo-a até refazer o inteiro.

O processo de partição envolve "criar quantidades menores, e de tamanhos iguais, a partir de uma quantidade maior", ao passo que o processo de iteração implica "combinar quantidades menores para criar uma quantidade maior" (Siebert & Gaskin, 2006, p. 395). As ações de partição e iteração permitem que os estudantes compreendam, na prática, o conceito de unidade, reforçando a ideia de que uma fração compõe, efetivamente, um único número, através da percepção dos significados correspondentes ao numerador e ao denominador, assim como possibilitam a conexão entre a fração unitária e o inteiro (Petit et al., 2010).

2.5.2 – A fração como medida: localização dos números fracionários na reta numérica

Ao considerar que a adição e a subtração dos números racionais em sua representação fracionária constitui o objetivo principal da minha investigação, e tendo em mente o modelo teórico proposto por Behr et al. (1983) relacionando os diversos subconstructos dos números racionais às operações com frações, o significado medida adquire uma maior relevância em nossa fundamentação, uma vez que está diretamente relacionado às operações de adição e subtração.

Segundo Wu (2009), compreender a fração como medida de comprimento de reta configura um aprimoramento do conceito de que uma fração representa uma determinada "parte de um todo", conceito este mais frequentemente trabalhado nos colégios, porém, até certo ponto, considerado reducionista e limitador. Para este autor, a reta numérica é o melhor caminho para demonstrar aos estudantes o real significado das frações, uma vez que serve como um ponto de referência natural para elas, tanto quanto os dedos servem como pontos referenciais para os números naturais.

> O uso da reta numérica tem a imediata vantagem de conferir coerência ao estudo dos números na matemática escolar: um número passa a ser definido inequivocamente por ser um ponto na reta numérica. Em particular, independentemente do número ser um número inteiro, uma fração, um número racional ou um número irracional, ele ocupa o seu lugar natural nesta reta (Wu, 2009).

Wu argumenta que ao representar as frações em uma reta numérica, as relações existentes entre os números inteiros e os números racionais ficam evidentes de forma simples e direta e sugere que seja feita uma experiência: que seja dividida uma reta numérica em números inteiros de igual comprimento (1.º passo); em seguida, que seja dividido o segmento de reta entre 0 e 1 em três partes de igual tamanho (2.º passo) e que, na sequência, continue se realizando o mesmo procedimento com todos os segmentos entre quaisquer dois números inteiros consecutivos (3.º passo). Os pontos correspondentes às divisões juntamente com os números inteiros representados na reta, formam uma sequência de pontos com espaçamentos iguais, todos números que podem ser claramente escritos como frações de denominador três. Em consequência, pode-se visualizar claramente que os números inteiros são parte integrante dos números racionais $\left(1=\frac{3}{3};2=\frac{6}{3};3=\frac{9}{3}\right)$ e perceber que não há diferença conceitual entre as frações próprias e as frações impróprias, por exemplo, entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{10}{3}$, uma vez que ambos os números seguem a mesma lógica de determinação, sendo igualmente de fácil acesso aos estudantes.

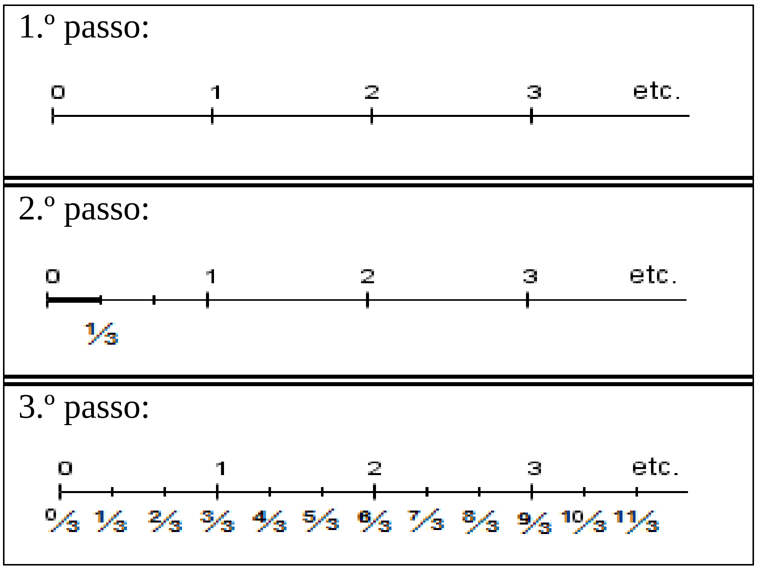


Figura 5 - Representação de frações na reta numérica

Portanto, a definição de fração como medida de comprimento da reta numérica favorece a uma maior e mais consistente compreensão do seu significado, uma vez que passamos a compreender que (i) todas as frações são criadas de forma igual, (ii) o conceito de frações é intrinsecamente flexível, pois, ao se especificar o que uma dada unidade representa, todas as frações podem ser interpretadas em termos dessa unidade; e (iii) ao se ter uma maior flexibilidade, demanda-se uma maior precisão nas suas representações.

2.5.3 – Equivalência de frações

A equivalência de frações é um dos conceitos chave dos números racionais, sendo útil para compreender uma fração como sendo um único valor numérico, além de ser um dos fundamentos para as operações de adição e subtração de frações (Charalambous & Pitta, 2007), permeando muitos dos problemas com frações. Para Vasconcelos (2007), o conceito de equivalência está apoiado na ideia de realizar diferentes divisões que resultam na mesma relação parte-todo. Compreender os conceitos inerentes à partição da unidade auxilia os alunos a desenvolver a noção de equivalência (Wheeldon, 2008).

Para que os alunos compreendam as frações equivalentes é preciso que percebam que uma mesma quantidade pode ser representada de diversas (e infinitas) escritas (Brasil, 1998), diferente dos números naturais que tem para cada quantidade uma única representação. Assim, encontrar frações equivalentes facilita a comparação entre frações com denominadores diferentes e, consequentemente, o cálculo das operações de adição e subtração.

Explorar a equivalência permite aos estudantes desenvolver a compreensão das frações como sendo simplesmente uma forma diferente de representar a mesma quantidade (Santos & Teixeira, 2015), e essa exploração pode ser realizada de forma simples e direta, conforme demonstrado pela figura a seguir:

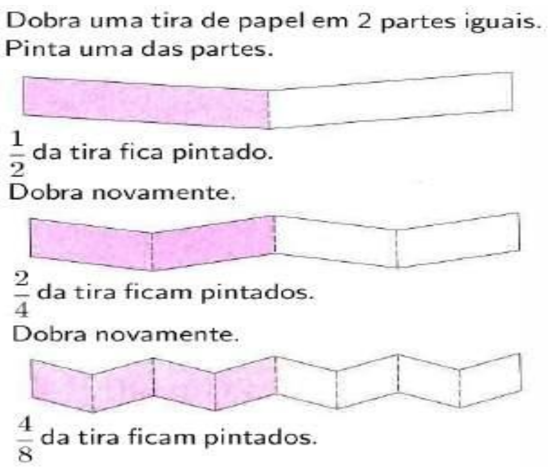


Figura 6: Frações equivalentes (Santos & Teixeira, 2015)

Pela tarefa acima proposta, o conceito de equivalência de frações emerge de forma clara e rápida através de uma simples dobragem de tira de papel, na qual a mesma porção de fita pode ser representada através de frações diferentes ($\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \ldots$), de acordo com a mudança do número de partes iguais em que se subdivide a unidade (Santos & Teixeira, 2015).

Llinares e Sanchéz (2000) argumentam que

> A importância da ideia de equivalência de frações se deve ao papel chave que joga em diversos aspectos: na relação de ordem (ordenar duas frações, inserir frações entre duas frações dadas), no desenvolvimento dos algoritmos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Em um nível mais elevado, a conceitualização do Número Racional como classes de equivalência de frações (entendendo como classes de equivalência o conjunto de todas as frações que descrevem as mesmas relações entre a parte considerada e o todo). (p. 117)

Wu (2009) argumenta que a reta numérica possui um papel especialmente útil para o ensino da equivalência de frações. Ao dividirmos um segmento entre 0 e 1 inicialmente em três partes iguais e, em seguida, dividirmos cada terço em cinco partes também iguais, o segmento original passa a apresentar 15 partes de mesmo comprimento (figura 7).

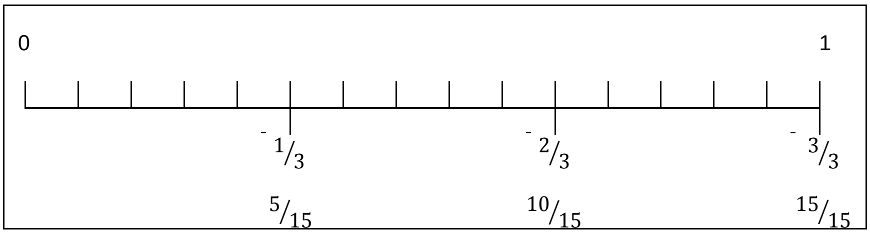


Figura 7 - Equivalência de Frações na Reta Numérica

Ao registrar na reta numérica as frações correspondentes a cada ponto das divisões efetuadas, fica fácil estabelecer as relações e perceber a equivalência entre as frações encontradas $\left(\frac{1}{3} = \frac{5}{15};\ \frac{2}{3} = \frac{10}{15};\ 1 = \frac{3}{3} = \frac{15}{15}\right)$.

É necessário enfatizar que o conceito de equivalência de frações está diretamente ligado ao conceito de unidade. Com frequência os manuais escolares afirmam que $\frac{3}{4}$ equivale a $\frac{6}{8}$, sem fazer a devida ressalva de que essa afirmação somente é válida se ambas as frações estão se referindo à mesma unidade. Por exemplo, $\frac{3}{4}$ de €100 não é o mesmo valor que $\frac{6}{8}$ de €50, mas $\frac{3}{4}$ de uma barra de chocolate representa o mesmo valor de $\frac{6}{8}$ da mesma barra de chocolate.

É importante que os alunos percebam que para cada fração há uma infinidade de frações equivalentes que podem ser identificadas e que, ao determinar frações equivalentes, está ocorrendo uma mudança da unidade de medida informada inicialmente, através da divisão ou da união das partições da fração original. Existe uma ampla variedade de estratégias que permitem determinar frações equivalentes, dentre elas, as representações lineares, tais como o modelo de barras e a reta numérica, na qual qualquer ponto da reta numérica pode representar um infinito número de frações equivalentes.

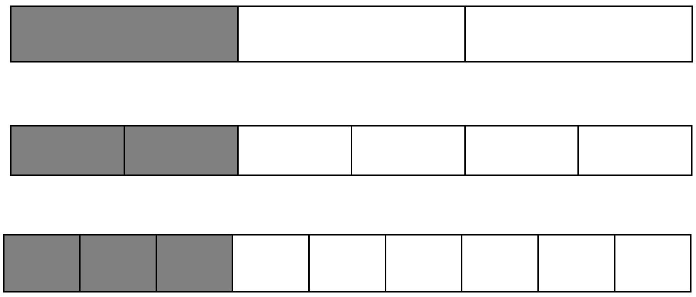


Figura 8 – Frações equivalentes representadas através do modelo linear de barras

As frações apresentadas acima são equivalentes e todas possuem representações numéricas diferentes $\left(\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}\right)$, mas expressam quantidades iguais.

O *CCSSM - Common Core State Standards for Mathematics, Grade 3, Number & Operations* (2018) recomenda que já no terceiro ano os alunos desenvolvam a compreensão das frações como números e que sejam capazes de

- reconhecer e criar frações equivalentes simples, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ... e explicar porquê as frações são equivalentes, por exemplo, usando um modelo fracionário visual;
- compreender que duas frações são equivalentes (iguais) se elas são do mesmo tamanho, ou estão no mesmo ponto na reta numérica;
- expressar números inteiros como frações, e reconhecer frações que são equivalentes a números inteiros. Exemplos: expressar 3 na forma $3 = \frac{3}{1}$, reconhecer que $\frac{6}{1} = 6$; registrar $\frac{4}{4}$ e 1 no mesmo ponto da reta numérica. (CCSSM, 2018).

Até que os conceitos de equivalência estejam realmente consolidados nas mentes dos alunos, deve-se evitar a utilização do algoritmo padrão para calcular frações equivalentes, através da multiplicação dos numeradores e denominadores pelo mesmo número, uma vez que este procedimento pode reforçar a ideia que a fração é composta por dois números inteiros, em vez de representar um único valor (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005).

2.5.4 – Comparação de frações

Comparar duas frações significa analisar qual representa a maior ou menor quantidade ou se elas são iguais, favorecendo ao estudante desenvolver o sentido de fração como quantidade, tanto quanto o tamanho da fração, ambos componentes necessários para compreender as demais operações com os números fracionários (Johanning 2011).

Para que essa comparação possa ser feita é obrigatório que ambas as frações refiram-se à mesma unidade, sendo primordial que os alunos já tenham adquirido corretamente os conceitos sobre equivalência de frações, pois, uma das aplicações da ideia de frações equivalentes se manifesta exatamente quando se quer comparar duas frações. Llinares e Sanchéz (2000) citam que o aluno precisa fazer uso de seus conhecimentos sobre o significado das frações bem como sobre a determinação de frações equivalentes para que possa efetuar corretamente a comparação entre frações. Por conseguinte, comparar frações trabalha também a ideia de ordem numérica.

À nível de abordagem simbólica, centrada na aplicação de algoritmos, existem algumas estratégias para comparação de frações. Os alunos podem, por exemplo, ter de comparar frações que apresentem o mesmo numerador: qual fração é maior: $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{7}$? Se nós pensarmos no significado dos numeradores, percebemos que a unidade dividida em sete partes tem pedaços menores que a mesma unidade dividida em cinco partes. Podemos concluir que $\frac{2}{5}$ é, portanto, maior que $\frac{2}{7}$. Cabe observar que esse raciocínio depende de uma importante ideia: quanto maior o denominador, menor o tamanho das partes em que a unidade foi dividida (Lamon, 2006).

Recorrer ao modelo de barras para fazer essa comparação, permitiria chegar a mesma conclusão de forma rápida e eficaz (figura 9):

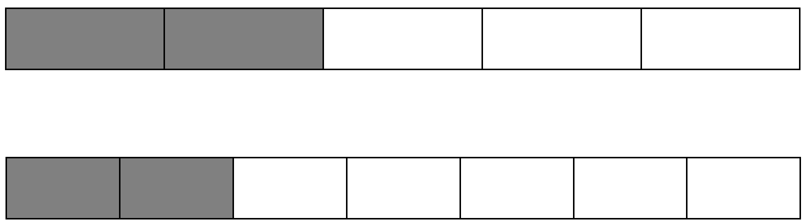


Figura 9 – Comparação entre as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{7}$ pelo modelo de barras

Uma estratégia para efetuar a comparação entre frações envolve obter numeradores comuns. Considere a comparação entre $\frac{6}{11}$ e $\frac{3}{5}$. Com a aplicação de algoritmos, é possível facilmente criar uma fração com numerador comum para realizar essa comparação: $\frac{6}{10}$ para $\frac{3}{5}$ e, então, comparar $\frac{6}{10}$ e $\frac{6}{11}$. Novamente, conclui-se que $\frac{6}{10}$ é maior que $\frac{6}{11}$, pois, décimos são maiores que onze avos e temos as mesmas quantidades de décimos e de onze avos. Obter um numerador comum pode ser uma poderosa e eficiente estratégia para comparar frações quando as frações tem numeradores pequenos ou um numerador é um múltiplo do outro (Lamon, 2006), porém, esse procedimento demanda que o aluno já tenha um conhecimento de aplicação de algoritmos mais avançado. Com o apoio ao modelo de barras, o aluno chegaria à mesma conclusão de forma mais simplificada (Figura 10):

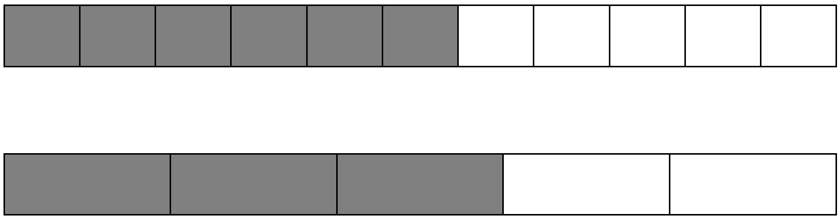


Figura 10 – Comparação entre as frações $\frac{6}{11}$ e $\frac{3}{5}$ pelo modelo de barras

Uma segunda estratégia envolve utilizar denominadores comuns. Essa é a estratégia frequentemente ensinada nas escolas e depende do fato que se nós temos partes de tamanhos iguais, podemos simplesmente determinar qual fração possui mais ou menos dessas partes. Essa estratégia é natural para uso na comparação de frações, como por exemplo: $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$. Podemos criar facilmente a fração equivalente $\frac{6}{8}$ para $\frac{3}{4}$ e comparar $\frac{6}{8}$ com $\frac{5}{8}$, concluindo que $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{5}{8}$. No entanto, essa estratégia pode ser complicada, ainda que para denominadores relativamente pequenos e, como sugere Orton et al. (1995), este procedimento pode não ser muito significativo para alunos do 5.º ano. Além disso, essa estratégia pode interferir com o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada do significado das frações para alguns estudantes, uma vez que estes podem simplesmente aplicar as ideias que aprenderam com os números inteiros nas frações. Com o auxílio do modelo de barras, encontramos (Figura 11):

Figura 11 – Comparação entre as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$ pelo modelo de barras

Uma terceira estratégia envolve usar frações de referência (*benchmarks*). Nessa estratégia, os estudantes utilizam valores de referência, tais como $\frac{1}{2}$ ou 1 para comparar frações. Por exemplo, ao comparar $\frac{8}{17}$ e $\frac{12}{21}$, podemos notar que $\frac{8}{17}$ é menor que $\frac{1}{2}$, uma vez que 8,5 é a metade de 17. Ao contrário, $\frac{12}{21}$ é maior que $\frac{1}{2}$, uma vez que 10,5 é a metade de 21. Assim, podemos concluir que $\frac{12}{21}$ é maior que $\frac{8}{17}$.

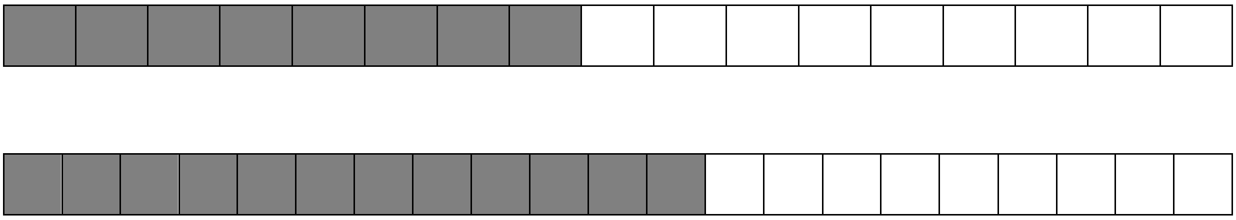


Figura 12 – Comparação entre as frações $\frac{8}{17}$ e $\frac{12}{21}$ pelo modelo de barras

Um uso mais complexo de valores de referência (*benchmarks*) envolve comparar duas frações que são tanto maiores ou menores que o *benchmark*. Por exemplo, ao comparar $\frac{6}{5}$ e $\frac{8}{7}$, reconhecemos que ambas frações são maiores que 1, uma vez que $\frac{6}{5}$ é $\frac{1}{5}$ maior que 1, e $\frac{8}{7}$ é $\frac{1}{7}$ maior que 1. Por sabermos que $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{7}$, nós também sabemos que $\frac{6}{5}$ está mais à direita na linha numérica que $\frac{8}{7}$ e, assim, é maior que $\frac{8}{7}$. Podemos aplicar um raciocínio similar para frações que são ambas menores que o *benchmark*. Ao considerarmos as frações $\frac{4}{10}$ e $\frac{3}{8}$, ambas menores que $\frac{1}{2}$, percebemos que $\frac{4}{10}$ é $\frac{1}{10}$ menos que $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{8}$ é $\frac{1}{8}$ menos que $\frac{1}{2}$. Porque sabemos que $\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{1}{8}$, nós também sabemos que $\frac{4}{10}$ está mais perto de $\frac{1}{2}$ na reta numérica e mais à direita que $\frac{3}{8}$. Portanto, $\frac{4}{10}$ é maior que $\frac{3}{8}$.

Para o CCSSM – Grade 3 (2018), ao findar o terceiro ano os alunos devem ser capazes de reconhecer que para que possam comparar duas frações estas devem referir-se à mesma unidade e que devem considerar os seus tamanhos ao fazerem comparações entre duas frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador. No quarto ano, recomendam que os alunos façam comparações entre frações com numeradores e denominadores diferentes através da determinação de denominadores comuns ou através de comparações com *benchmarks*.

2.5.5 – Adição e subtração de frações

As operações de adição e subtração com números racionais baseiam-se em ideias semelhantes às relativas às operações de adição e subtração com números naturais, representando, portanto, uma extensão aos números racionais dos conceitos aprendidos ao adicionar ou subtrair dois ou mais números naturais. No entanto, as quantidades envolvidas nas operações dos dois conjuntos numéricos diferem completamente entre si, acarretando uma substancial alteração nos procedimentos algorítmicos utilizados nas respectivas operações. Enquanto no conjunto dos números naturais as operações envolvem cardinais, no conjunto dos números racionais as quantidades referem-se a medidas ou partes de um todo.

Ao tentarem transpor para os racionais as mesmas regras e procedimentos usados na adição dos números naturais, uma parcela significativa dos alunos acaba por cometer um erro comum, ao adicionarem diretamente numerador com numerador e denominador com denominador. Por exemplo, ao tentarem fazer a operação $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ apresentam como resposta $\frac{3}{7}$. Tal incorreção denota que o aluno (i) ainda não se apropriou do sentido de número fracionário da forma devida, entendendo indevidamente o numerador e o denominador como dois números inteiros, sem qualquer inter-relação, e (ii) não se atentou para o fato de que para somar ou subtrair duas ou mais quantidades é indispensável que estas se refiram à mesma unidade, seja no conjunto dos números naturais ou dos números racionais. Para somar 100 cm com 80 m, é obrigatório transformar os centímetros em metros ou os metros em centímetros, de maneira a obter uma mesma unidade de medida. Nos números racionais, tal exigência é mantida, somente sendo possível efetuar diretamente as operações de adição e subtração de frações se os denominadores de todas as frações envolvidas forem iguais (por exemplo, $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$); caso contrário, é necessário que sejam obtidas frações equivalentes para esse fim.

Behr et al. (1983) argumentam que a natureza da unidade usada e transformada no processo de fracionamento, é essencial para que se possa descrever e modular o conceito de número racional e suas operações. É a partir desta lógica que surge a propriedade da redução ao mesmo denominador, tornando possível adicionar ou subtrair números racionais representados na forma de fração, ao encontrar uma unidade que seja comum aos números envolvidos na operação.

Ao aluno deve ser dada a oportunidade de visualizar a representação das frações em situações diversas, que proporcionem a ele compreender não somente os significados dos termos numerador e denominador, bem como da relação existente entre eles. Nesse sentido, a fração é um número construído a partir da relação entre o numerador e o denominador, e é a partir desta lógica que se pode alicerçar o conceito de denominador comum. Vem daí a importância de que o aluno adquira fluência em encontrar frações equivalentes, condição fundamental para a correta apropriação dos conceitos e procedimentos que abrangem as operações de adição e subtração de frações (Charalambous & Pitta, 2007).

Empson e Levi (2011) sugerem que, a medida que os estudantes se tornam fluentes com frações equivalentes, tornam-se mais capazes de compreender a adição de frações abrangendo unidades diferentes, e a necessidade de se encontrar uma unidade comum. O denominador comum emerge, portanto, da necessidade de somar ou subtrair frações em problemas que necessariamente apresentam denominadores diferentes.

Para o CCSSM (2018), ao concluírem o 4.º ano os alunos devem estar aptos a resolverem problemas que envolvam adição e subtração de frações com os mesmos denominadores, através da utilização de modelos visuais, por exemplo; enquanto no 5.º ano, espera-se que sejam capazes de solucionarem tarefas referentes a frações com denominadores diferentes, seja pela determinação dos denominadores comuns ou pelo uso de modelos visuais ou, ainda, através de estimação com valores referenciais.

A título de ilustração, imaginemos a seguinte situação envolvendo a partilha de uma barra de chocolate entre dois amigos. Se inicialmente a barra de chocolate for dividida em quatro pedaços e cada amigo comer um desses pedaços, a quantidade correspondente a cada um deve ser representada pela fração $\frac{1}{4}$. Se um dos amigos resolve, em seguida, comer mais a metade de um dos pedaços restantes, este pedaço, até o momento representado pela fração $\frac{1}{4}$ passa a ser representado pela fração $\frac{1}{8}$, uma vez que será dividido pela metade. Por extensão, cada pedaço representado pela fração $\frac{1}{4}$ passa a ser dividido em 2 partes, fazendo com que toda a barra fique dividida em 8 pedaços, com cada um desses pedaços correspondendo à metade dos pedaços originais. Dessa forma, o total que um dos amigos comeu fica representado pela adição de $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Uma vez que os denominadores correspondem a pedaços de tamanhos diferentes, é necessário que sejam transformados em pedaços de tamanhos iguais. Para operacionalizar essa transformação, deve-se considerar a partição inicial da barra de chocolate em 8 pedaços, a partir do que cada pedaço que cada amigo comeu no início passa a ser representado pela fração $\frac{2}{8}$ (equivalente a $\frac{1}{4}$) e a adição a ser representada por $\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$, totalizando $\frac{3}{8}$, justificando, assim, a necessidade de se obter frações equivalentes às frações dadas com um denominador comum para fazer a operação de adição.

O modelo linear de barras pode constituir um auxílio eficaz para alunos que apresentem uma maior dificuldade para raciocinar de forma simbólica, ao proporcionar que o aluno visualize de forma simples e clara as relações existentes entre as quantidades informadas no problema proposto (Middleton et al., 1998), favorecendo à escolha de estratégias que os conduza à solução do mesmo (Ventura, 2013). As representações abaixo refletem uma proposta para utilização do modelo de barras para clarificar a situação-problema:

1.ª etapa: Divisão inicial da barra de chocolate em 4 pedaços iguais e representação dos pedaços destinados a cada amigo (Figura 13).

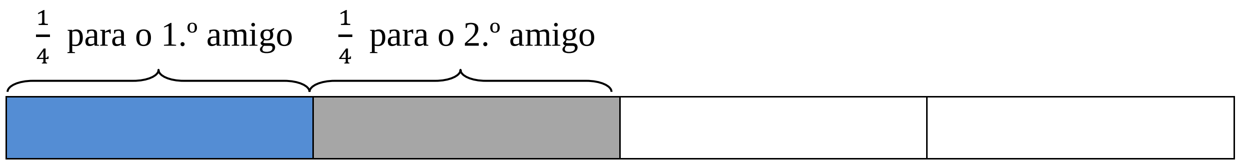


Figura 13 – Divisão de barra de chocolate – 1.ª etapa

2.ª etapa: Divisão pela metade de um dos pedaços restantes, correspondente ao pedaço a mais que um dos amigos quis comer, emergindo daí uma fração com denominador diferente das frações originais (Figura 14).

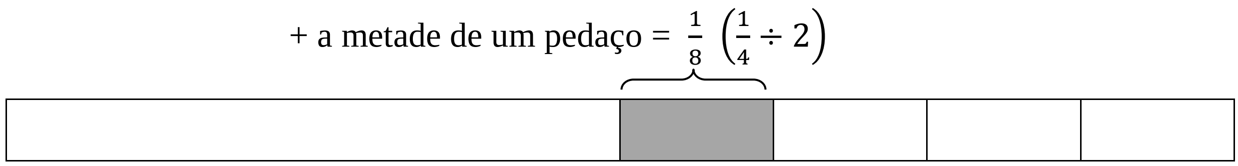


Figura 14 – Divisão de barra de chocolate – 2.ª etapa

3.ª etapa: Extensão para a totalidade da barra da nova representação da fração correspondente a cada pedaço, estabelecendo novas relações através da uniformização dos denominadores e, consequentemente, notações diferenciadas para representar o que cada amigo comeu (Figura 15).

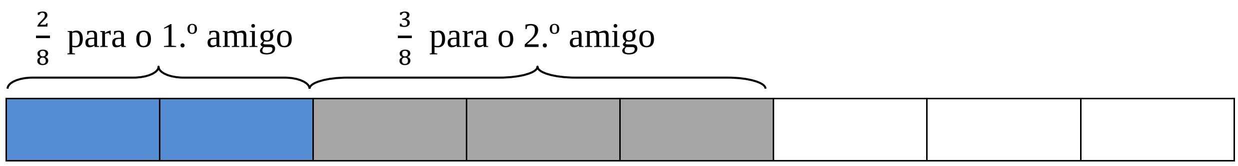


Figura 15 – Divisão de barra de chocolate – 3.ª etapa

Num segundo exemplo para demonstrar a eficácia do modelo de barras para a visualização de uma situação-problema proposta, imaginemos o seguinte: um motorista precisa viajar um longo trajeto, da cidade A para a cidade B. Ao fim do primeiro dia, verificou que havia percorrido $\frac{3}{5}$ da distância entre as cidades, porém, durante o segundo dia teve um problema com o carro, atrasando a viagem, e constatou que ao final desse dia havia conseguido percorrer apenas mais $\frac{1}{3}$ da distância total entre A e B. Quanto do percurso total o motorista já completou nos dois dias de viagem ? Quanto ainda falta completar ?

Representando o percurso total inicialmente por uma barra sem divisões e, na sequência construindo as barras correspondentes às partições informadas (Figura 16), temos:

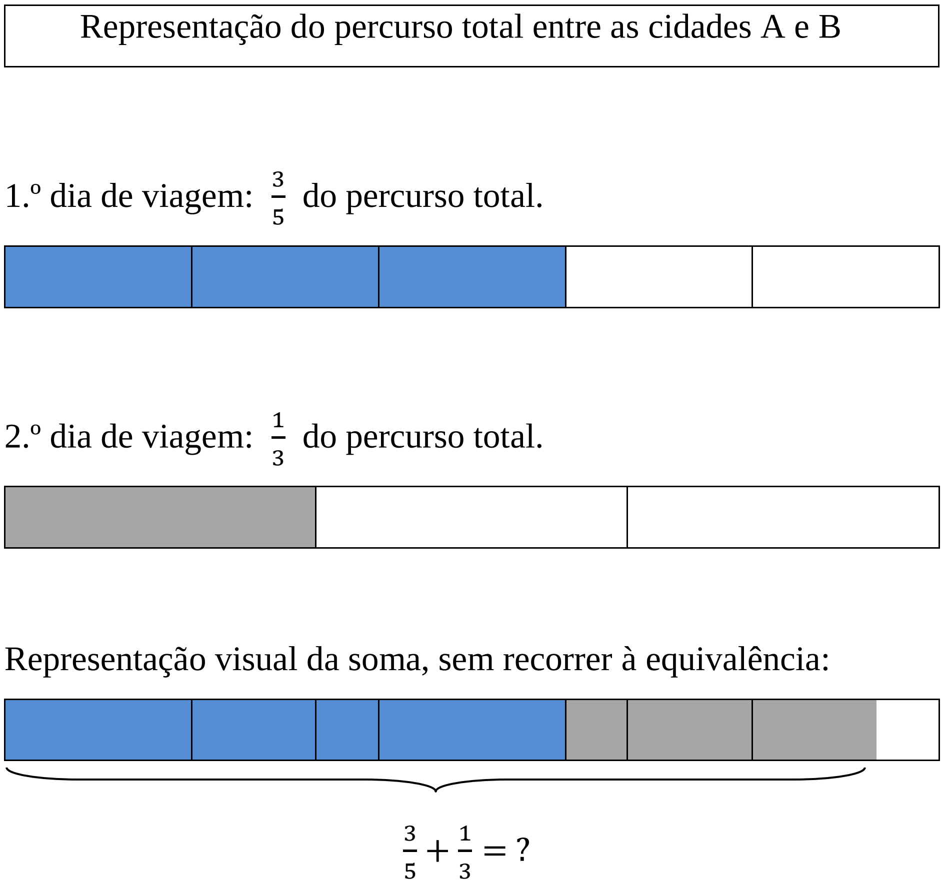
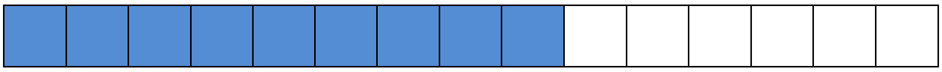


Figura 16 – Representação nas barras das distâncias percorridas entre as cidades A e B

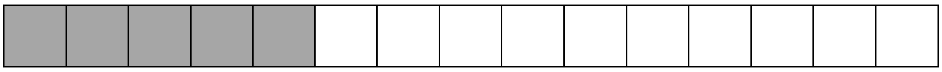
Apesar das representações acima indicarem visualmente as repostas às questões colocadas pelo problema, é difícil precisar através de notações simbólicas qual o percurso já percorrido e quanto ainda falta percorrer pelo motorista, uma vez que as frações não se referem à mesma unidade. Face ao descompasso entre as unidades consideradas nos dois dias de viagem, a visualização através do modelo de barras permite que os alunos constatem a necessidade de que sejam encontradas frações que representem partes de uma mesma unidade, conduzindo-os ao conceito de frações equivalentes com o mesmo denominador, possibilitando, assim, que a soma das distâncias seja efetuada de forma exata, tanto na representação visual como simbólica.

Dessa forma, ao representarmos as distâncias através de frações equivalentes, encontramos ambos os resultados, visual e simbólico, com precisão:

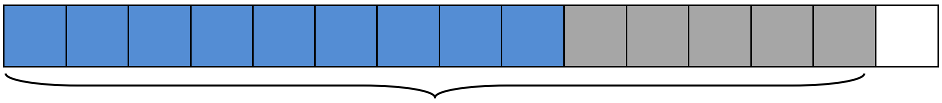
1.º dia de viagem: $\frac{9}{15}$ do percurso total (equivalente a $\frac{3}{5}$).



2.º dia de viagem: $\frac{5}{15}$ do percurso total (equivalente a $\frac{1}{3}$).



Representação visual da soma através das frações equivalentes:



$$\frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$$

Total percorrido nos dois dias = $\frac{14}{15}$; total a percorrer = $\frac{1}{15}$.

Figura 17 – Distância total percorrida entre as cidades A e B através de frações equivalentes representadas nas barras

2.5.6 – Adição e subtração de frações através de estimativas com o uso de padrões referenciais

Outro caminho para promover nos alunos a compreensão dos conceitos de adição e subtração dos números fracionários, sem recorrer a utilização direta de procedimentos algorítmicos, é utilizar o processo de estimativas através da comparação com valores referenciais (*benchmarks*), especialmente a metade e o inteiro (representados pela fração $\frac{1}{2}$ e pelo algarismo 1, respectivamente).

Incentivar nos alunos o aperfeiçoamento das suas habilidades de estimativa ajuda a prevenir que os mesmos utilizem um procedimento incorreto muito comum nas operações de adição de frações, ao somarem diretamente os numeradores e os denominadores entre si, além de contribuir para o aperfeiçoamento dos seus raciocínios lógicos, ao permitir que verifiquem intuitivamente se as soluções encontradas para problemas de adição de frações são razoáveis ou não. Por exemplo, perceberão que o resultado de $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$ não pode ser $\frac{3}{8}$, uma vez que sabem que $\frac{2}{3}$ é mais que $\frac{1}{2}$, logo o resultado tem que ser maior que $\frac{1}{2}$ (Lestiana, 2014).

A importância de se incentivar as crianças a calcular com base em estimativas também é destacada por Zunino (1995). Para ela, o processo de estimativa constitui uma importante estratégia do ponto de vista cognitivo, ao auxiliar os alunos a antecipar e a julgar resultados durante a resolução do problema, possibilitando a prevenção de erros.

Para Streefland (1991) o *um* constitui a unidade referencial para a representação do número inteiro. Segundo este autor, as crianças utilizam esse conhecimento para formar a ideia de unidade fracionária, o qual permitirá contar, dividir e reagrupar, tendo por base a unidade. Realizar divisões sucessivas de uma unidade em partes iguais e/ou reconstruir a unidade a partir das partes fracionadas, constituem ações fundamentais para a compreensão do número racional.

Ao referencial de *inteiro* vem juntar-se o referencial de *metade*, por estar também diretamente relacionado à compreensão de importantes conceitos matemáticos, como a proporção e a probabilidade, além de possibilitar que sejam estabelecidas conexões entre os significados parte-parte e parte-todo do número racional. Para Nunes e Bryant (1997), o conceito de *metade* pode ser considerado como um referencial importante para as crianças iniciarem a quantificação de frações.

Nunes e Bryant (1997), argumentam que o processo de estimativa pode ser mais fácil de se realizar, uma vez que privilegia o raciocínio em termos relativos como “mais ou menos que”, “maior ou menor que”, emergindo antes e mais naturalmente que o processo de raciocinar em termos absolutos, com base em cálculos numéricos precisos.

Incentivar o uso de tarefas não numéricas e de estimativas pode apoiar significativamente a resolução de problemas, pois, permite que os alunos tenham a oportunidade de estabelecer relações lógicas e não necessariamente revolver cálculos numéricos que podem ainda não dominar (Cruz & Spinillo, 2014). Desenvolver a capacidade de estimação e visualização pode auxiliar os estudantes a monitorarem seus trabalhos quando tiverem que calcular resultados exatos (Cramer, Wyberg & Leavitt, 2008).

Em resumo, a estimação deve ser apresentada como uma ferramenta para antecipar e avaliar a razoabilidade de uma resposta e deve ser enfatizado para os alunos que estimar é um passo preliminar para solucionar um problema, não um atalho para obter uma resposta exata (Siegler et al., 2010)

2.6 – Erros mais comuns na equivalência, na comparação e nas operações de adição e subtração de frações

Os professores devem estar permanentemente atentos aos erros dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem dos números fracionários, de forma que possam agir rápida e assertivamente com o objetivo de conduzí-los à compreensão devida dos conteúdos trabalhados.

Há erros que são cometidos por descuido, distração, etc., e outros que se devem a não compreensão total ou parcial do conteúdo em estudo ou, ainda, à aplicação de procedimentos errôneos, os quais podem ocorrer devido a uma utilização indevida ou esquecimento de algum passo do procedimento algoritimico necessário.

De acordo com Siegler et al., (2010), através do relatório do IES – *Institute of Educations*, existem alguns equívocos mais comuns cometidos pelos alunos nesse processo, dentre eles:

(i) calcular erroneamente o denominador comum entre frações heterogêneas antes de somar ou subtrair as frações, por exemplo: $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8}$, o que pode ser um indicativo de que os alunos ainda não possuem a compreensão devida de que diferentes denominadores refletem frações unitárias de tamanhos diferentes e que somar ou subtrair frações requer frações que refiram-se à mesma unidade, logo, com o mesmo denominador. Neste sentido, a utilização de representações visuais como o modelo de barras e a reta numérica podem ser úteis para mostrar a necessidade de que sejam determinadas frações equivalentes para adicionar ou subtrair frações heterogêneas;

(ii) ao efetuarem a comparação de frações, utilizarem a lógica pertinente aos números naturais, revelando falha na apropriação do conceito de magnitude correspondente aos números fracionários. Dessa forma, ao compararem $\frac{1}{5}$ com $\frac{1}{4}$, indicam que $\frac{1}{5} > \frac{1}{4}$, pois, 5 > 4;

(iii) perceber os numeradores e os denominadores das frações como números independentes, sem qualquer relação entre eles e, dessa forma, realizar as operações de adição e subtração utilizando diretamente os procedimentos algoritmicos aplicados nos números inteiros, por exemplo: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$. Para superar esse erro, é recomendável que seja apresentada uma situação-problema contextualizada e de fácil visualização pelos alunos, por exemplo, ao sugeri-los que imaginem que tenham inicialmente uma barra inteira de chocolate dividida previamente em cinco partes iguais e que tenham comido apenas uma dessas partes, restando-lhes $\frac{4}{5}$, dos quais darão $\frac{1}{3}$ a um amigo. Ao subtrairem os numeradores e os denominadores isoladamente, encontrarão por resultado a fração $\frac{3}{2}$, correspondente a 1,5 do chocolate, o que significaria que mesmo tendo as parcelas subtraídas entre si, ainda assim encontraram resultado maior que a barra de chocolate original, o que traduz-se numa impossibilidade. Exemplos como esse auxiliarão aos estudantes a compreenderem a razão de não poderem manipular os numeradores e os denominadores separadamente e, consequentemente, a perceberem que não podem utilizar os mesmos procedimentos algoritmicos usados nos números inteiros.

Apropriar-se incorretamente dos conceitos que envolvem os números racionais, em especial em sua forma fracionária, frequentemente interfere na compreensão dos procedimentos de cálculos correspondentes a estes conceitos. Cabe aos professores detectarem os erros e discutí-los com os alunos, fazendo-os perceber seus equivocos. Recorrer a modelos visuais e apresentar tarefas contextualizadas que envolvam frações com números plausíveis, fáceis de serem visualizados pelos alunos, podem ajudar a despertar neles habilidades intuitivas para solucionarem os problemas a que são expostos.

2.7 - O ensino dos Números Racionais nos documentos oficiais brasileiros

No Brasil, apesar de no 3.º ano ser feita uma breve introdução através da apresentação do fracionamento da unidade para representar partilha (metade - meio, metade da metade - quarto) em situações do quotidiano, é a partir do 4.º ano que os números racionais não negativos começam, formalmente, a ser ensinados, através dos conceitos de divisão em situações significativas de partilha e medida, continuando no 5.º e no 6.º anos com o ensino das operações com os racionais e com a resolução de situações-problema no contexto social, incluindo a ideia de equivalência e desigualdade de frações.

Independentemente do ano em que acontece o início da aprendizagem, é fundamental que os alunos adquiram uma correta compreensão dos diversos conceitos inerentes aos números racionais para que problemas enfrentados no dia a dia possam ser resolvidos, como por exemplo, em situações em que está implícita a relação de uma parte do todo, ou nas quais é necessário usar índices de comparação ou, ainda, na utilização de sistemas de medidas e monetários.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs - configuram um documento que apresenta um conjunto de recomendações a serem aplicadas pelas Secretarias Estaduais e Municipais de Educação, com os ajustes que porventura sejam necessários de forma a se adaptarem à realidade de cada estado ou município brasileiro. Não é, portanto, um documento que estabeleça normas rígidas para o ensino, devendo ser seguido sem flexibilidade. Em sua essência, os PCNs formam uma soma de orientações e proposições para o ensino, visando estabelecer uma base comum entre todos os sistemas de ensino brasileiros. Em relação ao 2.º ciclo do Ensino Básico, correspondente aos 3.º e 4.º anos, são destacados a seguir os conteúdos conceituais e procedimentais referentes aos números racionais, epecificamente em sua representação fracionária, sugeridos pelos PCNs para os anos letivos correspondentes:

- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente.
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão.
- Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária.
- Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional.
- Reconhecimento do uso da porcentagem no contexto diário. (Brasil, 1997, p.60, 61).

Quanto ao 3.º ciclo do Ensino Básico, correspondentes aos 5.º e 6º anos, as recomendações dos PCNs indicam que, ao final do mesmo os alunos deverão estar aptos a realizar:

- Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e exploração de situações - problema em que indicam relação parte-todo, quociente, razão ou funcionam como operador.
- Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problemas podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.

- Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações com números naturais, inteiros e racionais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados. (Brasil, 1998, p. 72).

De acordo com os PCNs, a introdução aos números racionais deve ser feita de forma a levar os alunos a perceberem que os números naturais já não são suficientes para resolverem determinados problemas do dia a dia, não conseguindo, por exemplo, exprimir a medida de uma grandeza ou o resultado de uma divisão, e devem estar sempre relacionados a situações contextualizadas, que tragam significado para o que está sendo ensinado.

Segundo os PCNs, ao estenderem as características dos números naturais aos racionais, os alunos acabam enfrentando alguns obstáculos:

- Um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, $1/3$, $2/6$, $3/9$ e $4/12$ são diferentes representações de um mesmo número;
- Outro diz respeito à comparação entre racionais; acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $1/3 < 1/2$;
- Se o "tamanho" da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8345 > 41), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- Se ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $1/2$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor que 10;
- Se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81; 0,815 ou 0,87 (Brasil, 1997, p. 67).

Tais dificuldades indicam que, para que o conceito de número racional seja alicerçado em bases sólidas, é necessário que seja dedicado um maior espaço de tempo ao processo de ensino e aprendizagem desse conjunto numérico, e que seja estabelecida uma dinâmica em sala de aula que proporcione experiências que permitam aos alunos aproximarem-se dos conceitos intrínsecos aos Números Racionais, através da efetiva compreensão de seus significados (quociente, parte-todo, razão, medida, operador) e de suas representações, fracionária e decimal (Brasil, 1997, p. 57).

Ainda apoiando-se nos PCNs, "a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos." (Brasil, 1997, p. 19).

Especificamente no Rio de Janeiro, a Secretaria Municipal de Educação, de acordo com os Descritores correspondentes ao ano de 2017, distribui da seguinte forma o ensino dos Números Racionais no 5.º ano:

- Comparar números racionais na forma decimal ou fracionária.
- Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação.
- Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.
- Identificar fração como representação da divisão de um todo ($^1/_2$ = metade; $^1/_3$ = terça parte).
- Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
- Identificar frações equivalentes.

- Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do Sistema de Numeração Decimal, identificando a existência de *ordens* como décimos, centésimos e milésimos.

3- Unidade de ensino

Neste capítulo são delineadas as ideias gerais que nortearam o planejamento da unidade de ensino, no que tange à elaboração das tarefas e às suas aplicações nas aulas das duas turmas participantes no estudo.

3.1 – Planejamento da unidade de ensino

A investigação foi realizada no Colégio Nossa Senhora de Lourdes – Unidade Botafogo, bairro de classe média localizado no Rio de Janeiro, onde lecionei durante 11 anos, entre 2005 e 2016, em turmas do 7.º ao 9.º ano do Ensino Regular e do 10.º ao 12.º ano da Educação de Jovens e Adultos. O Colégio faz parte da comunidade Lourdina de ensino, proveniente da cidade de Lourdes, no sudoeste da França, e está no Brasil há 105 anos, atuando através de oito unidades de ensino em diversas cidades brasileiras.

A unidade de ensino foi aplicada em duas turmas de 5.º ano entre os meses de Agosto e Setembro de 2017, com total e irrestrita colaboração das Professoras polivalentes (em Portugal, conhecidas por Professoras generalistas) Fernanda Monsão e Lorena Pombo, responsáveis, em conjunto, pelas turmas.

Durante o período de preparação da unidade de ensino e elaboração das tarefas, em uma conversa informal com a Professora Fernanda, fui informado que as duas turmas já haviam tido um contacto preliminar com os números racionais no corrente ano letivo. Nomeadamente havia sido feita uma pequena introdução à equivalência de frações, tendo sido utilizadas como apoio as Barras de Couisinaire. Porém, como logo em seguida os alunos entraram em recesso escolar no meio do ano letivo, o conteúdo seria retomado após o reinício das aulas. Propus, então, que a retomada acontecesse com o material que estava sendo preparado por mim contendo as tarefas propostas, e que a abordagem didática tivesse como apoio o modelo linear de barras, proposta essa prontamente aceita pelas duas professoras.

A unidade de ensino foi inicialmente planejada para se realizar em dez aulas de cinquenta minutos cada, em ambas as turmas, através de vinte e sete tarefas envolvendo a equivalência (nove tarefas), a comparação (seis tarefas), a adição e a subtração de frações (onze tarefas), incluindo uma envolvendo o uso de estimativas para cálculos com frações. No decorrer do processo de implementação das tarefas e após avaliação da sua evolução, a tarefa de número 10 foi retirada do planejamento inicial, por tratar de tópico já trabalhado em outras tarefas. Posteriormente, em virtude dos resultados obtidos na tarefa recorrendo à estimação de resultados (tarefa 17), na qual a maioria dos alunos respondeu às questões através do algoritmo do m.m.c. encontrando valores exatos para as perguntas, ao invés de recorrer ao cálculo por estimativa, o que configurava o objetivo da questão, surgiu a necessidade de alocar mais uma tarefa sobre esse tópico. Procurou-se, assim, avaliar os progressos feitos pelos alunos no decorrer do processo de ensino-aprendizagem, que lhes permitisse compreender e solucionar com correção questões envolvendo o cálculo por estimação.

3.2 – Os participantes

As turmas de 5.º ano onde se realizou o presente estudo são geridas em simultâneo pelas duas professoras titulares, Fernanda e Lorena, que desde o início do projeto mostraram-se totalmente disponíveis e entusiastas com a unidade de ensino sugerida.

Ambas as professoras possuem vasta experiência como docentes polivalentes e atuam profissionalmente no Colégio Nossa Senhora de Lourdes há mais de vinte anos. Em termos de formação acadêmica, a professora Fernanda, além de possuir o Magistério, é Bacharel em Pedagogia na área de Supervisão e Orientação Escolar e a professora Lorena possui o Magistério e cursos de formação e aprimoramento em geral na área da Educação.

A investigação contou com a participação de 34 alunos, sendo 16 da turma 501 e 18 da turma 502. Ambas as turmas são heterogêneas, com aproveitamento escolar geral classificado entre regular e médio, com valores variando entre 6 e 8, equivalentes em Portugal aos valores 3 e 4 do Ensino Básico. Os alunos estão habituados a trabalhar as tarefas propostas pelas professoras individualmente, em pares ou em pequenos grupos, dependendo do tipo de tarefa e do objetivo que se quer alcançar. Na presente unidade de ensino, os grupos foram constituídos por 3 ou 4 alunos.

A maioria dos alunos possuía 11 anos no período de realização da unidade de ensino e, segundo as professoras, apresentam comportamento dentro da normalidade esperada para a faixa etária. Cabe ressaltar que o Colégio Nossa Senhora de Lourdes é um colégio tradicional no bairro de Botafogo e que, não raro, sucessivas gerações de uma mesma família completam nele seus estudos básicos e secundários, sendo comum, também, que grupos de alunos iniciem e terminem juntos seus ciclos escolares nas mesmas turmas, o que possibilita uma maior continuidade e equilíbrio do processo de ensino e aprendizagem.

Por último, incluo-me como participante na investigação, tendo sido o responsável por apresentar a proposta de ensino às professoras e à direção do colégio, tendo elaborado as tarefas propostas para a unidade de ensino, discutindo-as com as professoras envolvidas e fazendo os ajustes necessários no decorrer do período de investigação.

Cabe observar que no início do período agendado para a recolha dos dados, a professora Fernanda teve que se afastar temporariamente do colégio por motivo de saúde. Assim, as dez sessões iniciais foram conduzidas pela professora Lorena, ficando a tarefa extra a cargo da professora Fernanda, trabalhada com os alunos em separado, após o período inicialmente planejado para a unidade de ensino.

3.3 – Sobre as tarefas da unidade de ensino

A unidade de ensino proposta tem por objetivo conduzir os alunos à aprendizagem da adição e subtração dos números racionais em sua representação fracionária, através de uma abordagem didática apoiada na utilização do modelo linear de barras, indo ao encontro dos pressupostos preconizados pela Educação Matemática Realista no que respeita ao uso de modelos e contextos no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Para que esse fim pudesse ser alcançado, fez-se mister elaborar tarefas diversificadas envolvendo não somente a adição e subtração de frações, mas incluindo, também, tarefas sobre equivalência e comparação de números fracionários, de maneira a proporcionar aos alunos uma efetiva compreensão dos conceitos atrelados a essas operações.

As tarefas matemáticas devem desafiar os alunos, no sentido de desenvolverem as suas compreensões e aptidões matemáticas, além de estimulá-los a fazerem conexões entre os diversos conceitos já aprendidos (Canavarro & Santos, 2012). De acordo com o Ministério de Educação de Portugal,

> A diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem é uma das exigências com que o professor se confronta, e a escolha das que decide propor aos alunos está intimamente ligada com o tipo de abordagem que decide fazer, de cunho essencialmente direto ou transmissivo, ou de caráter mais exploratório. Em qualquer caso, é preciso que as tarefas no seu conjunto proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. (ME, 2007, p.11)

A partir dos conhecimentos que os alunos já possuem, o processo de ensino-aprendizagem deve, segundo Davis e Espósito (1991),

> ...apresentar problemas que gerem conflitos cognitivos; dar ênfase à maximização do desenvolvimento e não apenas à busca de resultados, centrando-se no processo de construção do conhecimento; aceitar soluções "erradas" como pertinentes, desde que indicadoras de progressos na atividade cognitiva; fazer com que os alunos tomem consciência dos erros cometidos, percebendo-os como problemas a serem enfrentados, sem que lhes imponham caminhos previamente traçados (p. 200).

Ao promover a geração de conflitos cognitivos através de tarefas desafiadoras, deve-se objetivar que os alunos, ao se depararem com situações novas para a qual não possuem respostas por não terem ainda as ferramentas e técnicas necessárias para solucioná-las adequadamente, reelaborem seus conhecimentos prévios, reorganizando-os num patamar mais avançado, possibilitando, assim, a construção de um novo conhecimento (Davis & Espósito, 1991).

Para Ponte (2005), as tarefas desempenham um papel determinante para que os alunos alcancem a compreensão desejada. O autor enumera diferentes tipos de tarefas, classificando-as de acordo com as suas estruturas e graus de dificuldades, reduzidos ou elevados. Assim, uma tarefa pode ser categorizada como aberta, ao comportar "um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (p.8), ou fechada, "onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido" (p.7). Utilizando esse enquadramento, o autor indica que: (i) os exercícios constituem tarefas fechadas e de desafio reduzido; (ii) os problemas são tarefas fechadas, porém, com desafio elevado; (iii) as tarefas de investigação são tarefas abertas com elevado desafio; e, (iv) as tarefas de exploração, que se diferenciam das de investigação pelo grau de dificuldade que abrangem.

No desenvolvimento da unidade de ensino optei por desenvolver tarefas de diferentes tipos, contendo tanto tarefas de exploração, nas quais os desafios propostos, apesar de não serem muito elevados, exigem que os alunos utilizem as suas capacidades de interpretação e raciocínio para solucioná-los, como exercícios sem contextualização, com a intenção de introduzir os conteúdos aos alunos de forma mais direta.

Na maior parte das tarefas, buscou-se representar visual e simbolicamente as frações trabalhadas concomitantemente, com a finalidade de proporcionar aos estudantes o entendimento de que uma mesma fração pode ser representada de diferentes formas, além de começar a fortalecer a base para o trabalho futuro envolvendo a representação simbólica. Esta opção de abordagem didática está alinhada com a posição de diversos autores, entre eles Behr et al (1992) que argumentam que fazer a conexão entre diferentes formas de representação dos números racionais, através de imagens e símbolos, favorece à compreensão dos alunos acerca desse conteúdo. Da mesma forma, o NCTM, em seus Princípios e Normas para a Matemática Escolar, publicação traduzida pela APM em 2007, indica que a utilização de representações visuais e de material concreto proporcionam aos alunos a possibilidade de compreenderem ideias abstratas de forma concreta, o que facilita o uso das diferentes representações bem como a transição entre elas. Portanto, estabelecer conexões entre os modelos visual e simbólico é parte fundamental para a compreensão dos estudantes, que precisam ser estimulados a encontrarem seus próprios caminhos de raciocínio matemático.

Na primeira aula foram propostas três tarefas introdutórias (tarefas 1 a 3) com o intuito de apresentar o modelo linear de barras aos alunos e ambientá-los à abordagem pedagógica a ser utilizada durante o processo de investigação. As três tarefas recorriam à utilização de barras pré-desenhadas e solicitavam aos alunos que fizessem ou reconhecessem representações de frações equivalentes, com o objetivo de promover e verificar a percepção visual dos alunos quanto à equivalência de frações. Observa-se que as tarefas não demandavam muito tempo dos alunos para as suas resoluções.

Na segunda aula, foram trabalhadas duas tarefas (tarefas 4 e 5) envolvendo a equivalência de frações, na qual uma delas apresentava uma situação contextualizada com cinco questões e a outra um exercício de consolidação de conteúdo com a utilização das barras.

A terceira aula, com quatro tarefas, manteve o foco na equivalência de frações, porém, acrescentando a representação das frações na reta numérica (tarefas 6 a 9), com o objetivo de promover a percepção dos alunos acerca da localização dos números racionais na reta numérica.

A quarta, a quinta e a sexta aulas foram reservadas para tarefas com o objetivo de promover nos alunos estratégias de comparação de frações com denominadores comuns e diferentes (tarefas 11 a 16), e para a tarefa envolvendo cálculos por estimativa (tarefa 17), utilizando-se de valores referenciais como medidas de comparação, e apresentando, na maioria delas, situações contextualizadas.

A sétima, a oitava, a nona e a décima aulas contemplaram tarefas sobre adição e subtração de frações com denominadores comuns e diferentes (tarefas 18 a 27), tendo sido utilizadas representações simbólicas e/ou visuais, através de tarefas que apresentavam situações contextualizadas e tarefas de consolidação, com o propósito de propiciar aos alunos a correta compreensão dessas operações, objetivo principal dessa investigação.

Houve ainda uma décima primeira aula em que foi alocada a tarefa extra envolvendo cálculos por estimativa, para uma reavaliação dos progressos alcançados pelos alunos nesse domínio. Esta tarefa foi realizada em data posterior ao período de investigação planejado inicialmente e não contou com a minha participação como observador no momento de sua realização, uma vez que já havia retornado a Portugal.

3.4 – Dinâmica da unidade de ensino

As turmas foram previamente divididas pelas professoras em dez grupos de três ou quatro alunos – turma: 501 – grupos A ao E, turma 502 – grupos F ao J. Na constituição dos grupos, as professoras tiveram o cuidado de alocar alunos com graus variados de competência matemática em um mesmo grupo. Dessa forma, a diversidade permitiria que os alunos se apoiassem mutuamente durante a realização das tarefas.

Quanto à dinâmica aplicada na implementação das tarefas, as aulas decorreram de forma similar. No primeiro momento, a professora discorria, de forma breve, sobre os objetivos da tarefa, entregando-a, em seguida, em papel a cada grupo. Após ler a mesma com os alunos, disponibilizava um tempo para esclarecimento de dúvidas que porventura surgissem. Os grupos de alunos, então, passavam à realização da tarefa e, para finalizar o processo, acontecia o momento de discussão coletiva da mesma, no qual os alunos apresentavam as suas soluções e justificações. A Professora selecionava as resoluções que apresentassem um maior potencial para discutir com a turma, estivessem elas corretas ou não, projetando-as no quadro e solicitando a participação direta dos grupos escolhidos, cujos participantes eram convidados a irem à frente da sala e exporem suas linhas de raciocínio oralmente. A discussão era estendida à toda turma, que participava dando sugestões, colocando dúvidas e fazendo comparações com suas respostas. Em seguida, a professora fazia uma síntese da tarefa, dando por encerrado esse momento.

Cabe observar que no início da primeira aula e antes de entregar a primeira tarefa, a professora Lorena retomou o conceito de equivalência de frações, já introduzido aos alunos antes do recesso escolar do meio do ano letivo, valendo-se desse momento para demonstrar a representação e a determinação de frações equivalentes tanto através do modelo linear de barras como da representação simbólica, relacionando as duas representações, e recordando a necessidade de que seja utilizado um mesmo fator de equivalência no numerador e no denominador para que se calculem frações equivalentes às originais.

No início da quarta aula, na qual os alunos começaram a trabalhar as tarefas envolvendo comparação de frações, a professora fez a introdução dos conceitos relativos à esse tópico colocando no quadro alguns exemplos e solicitando a ajuda dos alunos para comparar as frações indicadas. No primeiro exemplo foram apresentadas duas frações unitárias ($\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$). A professora perguntou qual das frações era maior e obteve como resposta de uma pequena parcela de alunos que $\frac{1}{3}$ era maior que $\frac{1}{5}$. A professora, então, questionou-os como haviam chegado à essa conclusão e os alunos justificaram dizendo que como na fração $\frac{1}{3}$ a unidade estava dividida em menor quantidade de partes que na fração $\frac{1}{5}$, então cada parte da primeira fração ($\frac{1}{3}$) era maior que as da segunda ($\frac{1}{5}$).

Nesse momento, a professora solicitou a um aluno, que não havia respondido ao questionamento, que fosse ao quadro e fizesse a representação visual das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ através do modelo linear de barras. Após a representação visual, feita corretamente, a professora perguntou ao aluno se concordava com a conclusão apresentada pelos seus colegas anteriormente, recebendo como resposta que sim, pois, pelos desenhos feitos podia-se perceber facilmente qual era a maior das frações. A professora aproveitou para chamar a atenção dos demais alunos para a eficácia do modelo linear de barras para fazer a comparação de frações.

Em seguida, ainda utilizando o mesmo exemplo, questionou aos alunos se haveria uma outra forma para se comparar as duas frações. Como nenhum aluno se manifestou inicialmente, a professora perguntou se, pelo conhecimento que haviam adquirido nas frações equivalentes, achavam possível comparar duas frações heterogêneas, ainda que unitárias, recebendo como resposta de um aluno que achava que era necessário calcular as frações equivalentes correspondentes a cada uma das frações originais que tivessem o mesmo denominador para, somente então, fazer a comparação entre elas. A professora perguntou como ele faria o que havia sugerido e o aluno respondeu que calcularia através do processo de m.m.c. A professora, então, pediu que ele fosse ao quadro e demonstrasse o cálculo. Utilizando o método de decomposição simultânea em números primos, o aluno encontrou o denominador comum igual a 15 e as frações equivalentes $\frac{5}{15}\left(=\frac{1}{3}\right)$ e $\frac{3}{15}\left(=\frac{1}{5}\right)$, comparando-as a seguir.

O segundo exemplo proposto exibia frações com o mesmo denominador ($\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$). Mais uma vez, a professora solicitou à turma que um dos alunos fosse ao quadro e comparasse as frações da forma que preferisse, tendo o aluno optado por representá-las utilizando o modelo de barras, concluindo, sem qualquer problema, que $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$. Em seguida, a professora solicitou aos demais alunos que indicassem uma segunda opção para resolver a questão, recebendo como resposta que bastava comparar os numeradores, uma vez que as frações já possuíam denominadores iguais. Com isso, a professora reforçou o argumento de que para comparar duas frações homogêneas, basta fazer a comparação entre seus numeradores.

No terceiro exemplo foram utilizadas as frações ($\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$). Novamente, a professora solicitou que um aluno fosse ao quadro para responder a questão. O aluno que se apresentou optou por solucioná-la calculando o denominador comum através do método da decomposição simultânea e determinando as frações equivalentes para, em seguida, compará-las, encontrando $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Mais uma vez, a professora solicitou que outro aluno fosse ao quadro responder de forma diferente à mesma questão. Similar aos exemplos anteriores, o método de resolução escolhido pelo aluno que foi ao quadro, foi comparar devidamente as frações através das suas representações nas barras. Dessa forma, a professora buscou fazer com que os alunos percebessem a existência de diferentes tipos de representações visuais e simbólicas propícias para solucionar questões envolvendo equivalência e comparação de frações homogêneas e heterogêneas, promovendo a inter-relação entre as representações. Adicionalmente, a professora estava consolidando esse conhecimento que, no futuro próximo, seria indispensável para a adição e subtração de frações.

Na abertura da sétima aula, que daria início às tarefas envolvendo as operações de adição e subtração de frações, antes de passar à resolução das tarefas planejadas para esse dia, a professora Lorena introduziu o novo conteúdo colocando no quadro algumas adições e subtrações de frações com o mesmo denominador. Para cada cálculo proposto, desenhou três barras vazias, de igual tamanho, e solicitou o auxílio dos alunos pedindo que fossem ao quadro para representar as frações indicadas nas duas barras iniciais e o total da operação na terceira barra. Todas as questões foram respondidas corretamente pelos alunos. Na sequência, com o apoio dos conhecimentos já adquiridos nas tarefas de equivalência e comparação de frações, repetiu o mesmo procedimento com frações com denominadores diferentes, e os alunos, mais uma vez, não demonstraram dúvidas para solucionar as questões, determinando as frações equivalentes com denominadores comuns e realizando as operações indicadas e, posteriormente, fazendo as representações devidas nas barras.

Durante todo o período em que a unidade de estudo decorreu, o desenvolvimento das aulas evoluiu de forma tranquila, com os alunos empenhados em participar das atividades propostas. Nas poucas vezes em que se avizinhava uma dispersão por parte de algum aluno ou grupo de alunos, a professora Lorena fazia com que os mesmos voltassem imediatamente à atenção às atividades, fazendo-se valer da sua grande experiência como educadora e da comunicação fácil e direta estabelecida com as turmas.

Pela experiência que tive ao lecionar em alguns colégios brasileiros, especificamente na cidade do Rio de Janeiro, bem como através da troca de informações com diversos outros professores de matemática, cabe observar que não é comum solicitar aos alunos que justifiquem suas respostas em linguagem corrente, uma vez que habitualmente se subentende que a justificação para uma questão matemática já é feita através do desenvolvimento da própria solução, através da notação simbólica e da aplicação dos procedimentos de cálculo pertinentes. Este hábito pode reforçar a ideia de que o ensino continua centrado mais na compreensão procedimental que na compreensão conceitual, conforme já visto anteriormente, e, portanto, como na maioria das tarefas aplicadas aos alunos foram requeridas justificações para os resultados encontrados, a forma como os alunos responderiam a essas solicitações acabou por constituir um elemento a mais a ser percebido no processo investigativo.

3.5 – Calendarização da unidade de ensino

A unidade de ensino foi planejada para ocorrer em dez aulas de cinquenta minutos cada em cada turma participante na investigação, tendo sido acrescentada uma aula de vinte minutos para a implementação da tarefa extra elaborada, decorrida após o período inicialmente programado, conforme segue (Quadro 2).

Quadro 2 - Calendarização da unidade de ensino

Aula	**Tarefas**	**Objetivos**	**Tempo (min)**
1	1, 2 e 3	Equivalência de Frações	50
2	4 e 5	Equivalência de Frações	50
3	6, 7, 8 e 9	Equivalência de Frações – Representação na Reta Numérica	50
4	11, 12 e 13	Comparação de Frações	50
5	14 e 15	Comparação de Frações	50
6	16 e 17	Comparação de Frações e Estimativas de Cálculo com Frações	50
7	18, 19 e 20	Adição e Subtração de Frações	50
8	21 e 22	Adição e Subtração de Frações	50
9	23, 24 e 25	Adição e Subtração de Frações	50
10	26 e 27	Adição e Subtração de Frações	50
11	Extra	Estimativa de Cálculo com Frações	20

4- Metodologia da investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas que nortearam a investigação. Inserida no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa através de um estudo de caso, a investigação tem por objetivo compreender as estratégias e as dificuldades apresentadas por alunos do 5º ano na adição e subtração de frações no contexto de uma unidade de ensino que utiliza o modelo linear de barras como abordagem didática. O estudo foi realizado em duas turmas de 5.º ano do Ensino Fundamental no ambiente da sala de aula, através de tarefas envolvendo a equivalência, a comparação, a adição e a subtração de números racionais em sua representação fracionária, tendo sido utilizados para a recolha de dados os registros escritos dos alunos, gravações em áudio e vídeo e notas de campo.

4.1 – Opções metodológicas

Pelas características da investigação proposta, a metodologia adotada enquadra-se nos fundamentos do paradigma interpretativo, ao valorizar a compreensão e a explicação de um determinado fenômeno ou situação, com o objetivo de desenvolver e aprofundar o conhecimento do mesmo em toda a sua complexidade e nuances em um dado contexto (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com Merriam (1988), "os estudos de caso qualitativos constituem uma opção metodológica de investigação particularista, incidindo diretamente no objeto que se visa conhecer em profundidade", e apresentam um forte caráter descritivo do fenômeno estudado, buscando abranger o máximo possível de suas especificidades.

A opção pela abordagem qualitativa pressupõe uma ênfase em processos e significados que, em geral, não são analisados nem medidos com rigor em termos de quantidade, frequência, intensidade ou volume. Esse argumento reitera uma das mais fortes particularidades da abordagem qualitativa, que é a de dar ênfase aos processos, muito mais do que aos produtos finais encontrados.

Diversos autores, entre eles Bogdan e Biklen (1994) citam múltiplas características inerentes à investigação qualitativa, entre elas: (i) decorrer no ambiente natural dos fenômenos que se quer estudar. A presente investigação teve lugar diretamente na sala de aula, durante a realização da unidade de ensino proposta; (ii) o investigador qualitativo é o principal instrumento da investigação e, nesse sentido, a compreensão que o investigador tem sobre os dados e sobre o contexto em que estes são recolhidos constitui-se elemento-chave de todo o estudo; (iii) a amostra é reduzida e estatisticamente não representativa. Em minha investigação, contei com um total de 34 alunos, distribuídos por duas turmas de 5.º ano; (iv) usa variadas fontes de informação e recolha de dados; para este fim, utilizei como instrumentos os registros escritos dos alunos, gravações em vídeo e notas de campo; (v) os dados são de natureza essencialmente descritiva e interpretativa, cabendo ao investigador descrever os participantes e os locais, interpretar os dados de forma indutiva e exploratória e retirar conclusões; (vi) apresenta desenho aberto, flexível e emergente, possibilitando ajustes e inserções de novas questões durante o processo investigativo, ou seja, emerge do próprio processo de investigação em vez de ser pré-estabelecida. Durante a execução da unidade de ensino esta característica se fez presente, haja visto ter optado por excluir uma das questões proposta inicialmente (questão 10), por entender que a mesma referia-se a assunto já contemplado em tarefas anteriores, sendo redundante a sua aplicação; em contrapartida, decidi incluir, ao fim da unidade de ensino, uma tarefa extra correspondente à resolução de adição de frações por estimação, com o objetivo de verificar a evolução dos alunos nesse conteúdo; (vii) centra o interesse na compreensão do modo como os fenômenos decorrem, sendo o processo mais relevante dos que os resultados obtidos. A análise das resoluções das tarefas apresentadas pelos grupos centrou-se fundamentalmente nos processos utilizados pelos alunos para solucionarem as questões propostas, muito mais importante para a investigação que me propus realizar do que a simples constatação da correção ou incorreção dos resultados encontrados. Ainda que responder corretamente uma questão seja um ponto fulcral, perceber os procedimentos de resolução empregados pelos alunos em uma tarefa constitui-se a base para procedermos a uma análise consistente dos caminhos percorridos até então, auxiliando-nos na compreensão dos erros e acertos cometidos durante o processo de ensino e aprendizagem e indicando alternativas e possibilidades a seguir.

De acordo com Ponte (2006), este tipo de investigação possui natureza empírica, alicerçada em análise documental ou com base em trabalho de campo, ao estudar uma determinada entidade em seu contexto real através de múltiplas fontes de dados. Para o autor, os estudos de casos tem por objetivo:

> Compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (Ponte, 2006, p. 2).

Existem diversas modalidades de estudos de casos, diferenciadas por suas características e procedimentos: estudos de casos observacionais, no qual a presente investigação está enquadrada; estudos de casos ao longo do tempo; estudos de comunidades; estudos microetnográficos; estudos de casos múltiplos; e, estudos multissituacionais (Aires, 2015).

Cabe observar que a abordagem qualitativa não é uma modalidade de investigação com aprovação unânime entre os pesquisadores, que citam como uma das suas principais desvantagens a impossibilidade de generalizar os resultados, pois, não é possível transferir diretamente os dados de uma realidade para outra, podendo apenas traçar-se analogias e procurar-se padrões e temas comuns. Um estudo qualitativo não pode ter pretensões a generalizar para toda a população a partir da análise aprofundada de alguns casos. Os dados obtidos permitem, porém, que o investigador teorize sobre o processo que é alvo de estudo, sem pretender aferir sobre a frequência desse processo na sociedade (Serapioni, 2000).

4.2 – Questões de Natureza Ética

Toda investigação científica, qualquer que seja o ramo em que esteja inserida, constitui um processo multifacetado, complexo e com uma dinâmica própria, envolvendo múltiplos sujeitos que interagem com o investigador para a realização da mesma. A Investigação em Educação não foge à regra e por ser eminentemente uma atividade humana precisa se pautar e obedecer a princípios éticos, e que devem estar presentes em todo o processo de investigação, desde a definição do tema, passando pela escolha dos instrumentos de recolha de dados, pelo absoluto respeito aos participantes, que devem ser informados sobre todos os passos do processo investigativo, incluindo as finalidades e os procedimentos a serem tomados pelo investigador, estendendo-se, obviamente, à fase de analise das informações obtidas e a consequente produção e publicação dos resultados.

Ainda que a dimensão ética seja parte integrante em todas as abordagens metodológicas de investigação, ela mostra-se particularmente em evidência quando se trata da abordagem qualitativa, especialmente por essa metodologia: (i) ter como principal instrumento da investigação o próprio investigador e, em consequência disso, a compreensão que este tem sobre os dados e o contexto em que são recolhidos, que podem vir a influenciar substancialmente os resultados da investigação se não forem tratados com a isenção e a neutralidade devidas, sem tendências ou prejulgamentos. Nesse sentido, a correção intelectual e a imparcialidade são características imperativas ao investigador, de modo a assegurar interpretação fidedigna dos dados obtidos; (ii) acontecer no ambiente natural dos fenômenos que se quer investigar, o que pode acarretar interferências no processo natural dos acontecimentos; e (iii) apresentar desenho aberto, flexível e emergente, o que faculta que sejam efetuados ajustes e inserções de novas questões durante o processo investigativo; neste sentido, se ocorrerem alterações no planejamento inicial, os participantes devem ser devidamente informados atempadamente, para que seja estabelecida uma nova concordância entre as partes.

Para Fiorentini e Lorenzato, “os questionamentos éticos dizem respeito, entre outros, aos direitos dos entrevistados, ao respeito e bem estar dos participantes, à preservação da identidade das pessoas envolvidas, aos usos e abusos das informações e citações de outros autores, à fidedignidade das informações, às implicações sociais e políticas da pesquisa (Fiorentini & Lorenzato, 2009). Bogdan e Biklen (1994) argumentam que, na atualidade, dois pontos se destacam ao tratar-se de questões éticas inerentes à "investigação com sujeitos humanos; o consentimento informado e a protecção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos" (p. 75).

Em síntese, para que uma investigação esteja enquadrada dentro dos limites éticos necessários à sua realização, deve atender aos seguintes princípios: (i) ter o consentimento de todos os participantes no estudo, que devem estar cientes dos objetivos e da finalidade da investigação. Estes consentimentos, em geral, devem ser formalmente estabelecidos através de autorizações assinadas, nas quais constem a anuência para a captação e uso de imagens e depoimentos, se for o caso; (ii) os participantes devem ser livres para, em qualquer momento do processo investigativo, optarem por não mais participar; (iii) preservar a identidade e a integridade dos participantes, mantendo-os no anonimato; (iv) o pesquisador deve procurar interferir o minimamente possível no ambiente que será palco da investigação para que não ocorra maiores perturbações no curso natural das rotinas, a menos que o processo investigativo contemple uma intervenção intencional; (v) o uso e a localização de equipamentos de captação de som e/ou imagem no ambiente da investigação devem ser analisados com antecedência, com o objetivo de reduzir o impacto no andamento habitual a que os participantes estão acostumados; (vi) selecionar as informações e dados recolhidos a serem publicados, preservando dados confidenciais que possam causar algum tipo de prejuízo ou constrangimento a algum participante; (vii) divulgar, primeiramente, os resultados da investigação aos participantes que cooperaram para a realização do estudo.

Na presente investigação, negociei e obtive o consentimento prévio de todo o grupo envolvido, nomeadamente do colégio, através de suas diretoras, coordenadoras e supervisoras pedagógicas, das professoras e dos responsáveis pelos alunos, para poder observá-los durante o período de aplicação da Unidade de Estudo proposta. Tais consentimentos foram obtidos através de pedidos de autorização por escrito encaminhados aos participantes (Anexos 2 e 3), nos quais apresentei o tema da investigação com um breve resumo de seus objetivos, delimitei o período necessário para a consecução da investigação, informei que a recolha de dados contaria com a gravação em vídeo e áudio das aulas e comprometi-me a salvaguardar o anonimato de todos os participantes, ressaltando a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo esta utilizada somente na esfera da realização dessa investigação.

No decorrer da unidade de ensino, por haver decidido participar como observador, procurei manter-me o mais discretamente possível, sentando ao fundo da sala, e localizei a câmera digital utilizada para a gravação dos momentos de discussão em cima de uma cadeira na lateral da sala de aula, de forma a perturbar o mínimo o ambiente da sala de aula.

Durante a análise das questões escolhidas por mim para fazerem parte desse estudo preservo o anonimato dos alunos, e apesar de manter a designação original das duas turmas – 501 e 502 – envolvidas no projeto, identifico os grupos em que os alunos foram divididos utilizando as letras de A a J. Quanto às duas professoras envolvidas, mantive seus nomes reais, devidamente autorizado por elas; o mesmo acontecendo com o nome do colégio em que a investigação foi levada a termo, com a autorização da direção.

4.3 – Métodos e procedimentos de recolha de dados

O presente estudo insere-se na modalidade de estudos de casos observacionais e a recolha de dados para a consecução do mesmo foi realizada entre agosto e setembro de 2017, em dez aulas de cinquenta minutos, em cada uma das turmas, correspondendo à totalidade das aulas da unidade de ensino.

Atuei como participante observador, sem interagir com os demais participantes no momento da investigação em sala de aula. Ao escolher essa forma de participação, considerei o fato de não ter tido, até aquele momento, qualquer experiência prévia com os alunos, sendo, portanto, completamente desconhecido para eles. Se a presença de um pesquisador estranho ao grupo, ainda que agindo como mero observador, pode provocar alterações no comportamento dos observados e tolher a espontaneidade dos mesmos, uma participação mais ostensiva da minha parte, interferindo na dinâmica de aula a que estavam acostumados com as professoras usuais, poderia causar um maior constrangimento para os alunos.

Optei por não estabelecer um guião ou uma grelha prévia em que pudesse apoiar-me ao registrar notas de campo no decorrer do processo de observação das aulas, preferindo não ater-me à questões pré-estabelecidas, e utilizei os seguintes métodos de recolha de dados: (i) registros escritos dos alunos, recolha documental imprescindível por representar parcela considerável da experiência dos alunos na investigação. No presente estudo, foram recolhidas, digitalizadas e analisadas todas as respostas dadas pelos grupos de alunos às tarefas propostas, e no momento da discussão coletiva com a turma tomou-se o cuidado para que os alunos não efetuassem correções diretamente nas folhas de respostas das tarefas, o que poderia acarretar considerável perda de consistência para a fase de análise das estratégias usadas para solucionar as tarefas; (ii) gravações em vídeo dos momentos de discussão coletiva para posterior transcrição, constituindo uma rica fonte de elementos para auxiliar a desvendar a complexa rede de produção de significados e sentidos manifestados em relações, palavras e gestos dos alunos, minimizando a intervenção do pesquisador (Honorato et al., 2006). Para esse fim, as gravações foram realizadas através de uma câmera digital de pequeno porte, colocada em cima de uma carteira escolar no lado esquerdo da sala, de forma a não interferir nem desvirtuar a atenção dos alunos; e, (iii) notas de campo, que ajudam a organizar e clarificar os principais acontecimentos, através das quais procurei registrar aspectos que considerei importantes para a consecução do estudo: nelas fiz apontamentos sobre o comportamento e sobre os modos de comunicação dos alunos entre si e com as professoras, fiz breves descrições sobre o ambiente das salas de aula, busquei reconstruir diálogos ocorridos entre os participantes, principalmente na fase de discussão coletiva das soluções das tarefas e, por último, aproveitei para registrar pontos de reflexão e análise surgidos no decorrer das aulas e que me proporcionaram uma reavaliação constante do trabalho que estava sendo realizado, e que me levou a optar por excluir a tarefa 10 do processo de investigação, bem como criar uma tarefa extra a ser aplicada após conclusão do conjunto de tarefas inicialmente planejado.

4.4 – O processo de análise de dados

Das vinte e sete tarefas elaboradas para a unidade de ensino, nove referiam-se ao tópico de equivalência, sete à comparação de frações, uma tarefa reportava-se ao cálculo por estimação e as dez últimas tarefas à adição e subtração de frações. A tarefa de número 10, sobre comparação de frações, foi excluída do processo de investigação por haver chegado à conclusão que sua aplicação seria redundante, por repetir questionamento já avaliado em outras tarefas anteriores, e foi incluída uma tarefa extra envolvendo cálculo por estimação. Todas as folhas com os processos de resolução e as respostas dadas pelos alunos foram recolhidas e analisadas.

Do conjunto de tarefas efetivamente aplicadas na unidade de ensino, optei por apresentar neste estudo a análise das tarefas: (i) 3, 6 e 9, relacionadas à equivalência de frações, (ii) 12, 15 e 16, referentes à comparação de frações, (iii) 17, correspondente à adição de números fracionários por estimação, e (iv) 18, 21, 23, 25 e 27, relativas à adição e subtração de frações. Ao selecionar estas tarefas busquei privilegiar aquelas cujas estratégias de solução utilizadas pelos alunos fornecem dados mais consistentes acerca das linhas de raciocínio e das dificuldades enfrentadas por eles ao solucioná-las, e que entendo vir ao encontro às questões de investigação propostas. Adicionalmente, apresento um quadro com a análise global das tarefas de adição e subtração de frações, com os respectivos índices de acertos, erros e de não solução por parte dos grupos de alunos.

Com o objetivo de nortear a análise das estratégias e das dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas, estruturei quadros de categorização dos dados obtidos, de acordo com os conteúdos específicos a que se referiam.

Em relação à equivalência de frações, foram categorizadas como corretas tanto as estratégias que utilizaram o processo de cálculo do m.m.c. para encontrar as frações equivalentes solicitadas como as que fizeram uso do modelo linear de barras e das retas numéricas, conduzindo os alunos às respostas devidas. Em contrapartida, foram categorizadas como incorretas as estratégias que, apesar de apresentarem os cálculos devidos do m.m.c., cometeram erros ao fazer as correspondências necessárias nos numeradores, ou que tenham representado indevidamente a equivalência das frações pelo modelo linear de barras ou através das retas numéricas (Quadro 3).

Quadro 3 – Categorização – Equivalência de frações

Equivalência de Frações		
	Estratégias Corretas	**Estratégias Incorretas**
	(E1) Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c.	**(E5)** Calcular o m.m.c corretamente, porém, sem fazer a correspondência devida nos numeradores.
	(E2) Representar a equivalência de frações através do Modelo de Barras	**(E6)** Calcular o m.m.c. corretamente, porém, usando o novo denominador para fazer a correspondência nos numeradores, sem considerar o fator de multiplicação correto
	(E3) Fazer a equivalência de frações corretamente, porém sem justificação ou com justificação indevida	**(E7)** Não estabelecer ou estabelecer relações incorretas de equivalência ao relacionar representações visuais e simbólicas
	(E4) Determinar e representar corretamente a equivalência de frações na reta numérica	**(E8)** Representar incorretamente a equivalência de frações através do Modelo de Barras
		(E9) Determinar e representar na reta numérica frações equivalentes incorretamente, apresentando falhas na compreensão da unidade e da sua partição, além de multiplicar os termos da fração original sem observar as regras de equivalência

Quanto às tarefas envolvendo comparação de frações, foram categorizadas como corretas todas as estratégias que levaram os alunos a fazerem as comparações através de frações equivalentes, ou através da utilização do modelo linear de barras, ou ainda, através da comparação com valores de referência no caso específico da tarefa 17. Nas estratégias incorretas foram agrupadas todas as que indicaram falha na compreensão desse tópico, comparando os numeradores e denominadores das frações originais sem calcular as frações equivalentes, ou que manipularam os números racionais como se fossem números naturais, ou ainda, demonstraram falta de atenção acarretando justificações incorretas ou respostas sem justificações (Quadro 4).

Quadro 4 – Categorização – Comparação de frações

Comparação de Frações		
	Estratégias Corretas	**Estratégias Incorretas**
Frações com Denominadores Iguais	**(C1)** Comparar os numeradores originais corretamente	**(C6)** Comparar os numeradores originais incorretamente
Frações com Denominadores Diferentes	**(C2)** Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c., reescrevendo-as e comparando os novos numeradores corretamente	**(C7)** Comparar os numeradores e os denominadores originais das frações, sem considerar a necessidade de calcular as frações equivalentes
	(C3) Representar as frações indicadas através do Modelo Linear de Barras, comparando os resultados encontrados visualmente	**(C8)** Comparar os numeradores e / os denominadores originais das frações, como se fossem números independentes
	(C4) Calcular frações equivalentes através de fatores de multiplicação / divisão aplicados nos numeradores e denominadores, comparando-as	**(C9)** Calcular o denominador comum corretamente, porém, sem fazer a correspondência devida nos numeradores, mantendo e comparando os originais
	(C5) Comparar as frações com valores de referência (p.e.: $\frac{1}{2}$, 1)	**(C10)** Calcular o denominador comum corretamente, porém, usando o novo denominador para fazer a correspondência nos numeradores, sem considerar o fator de multiplicação correto para cada fração envolvida
		(C11) Outras

No tocante às tarefas de adição e subtração de frações, foram categorizadas como corretas todas as estratégias que conduziram ao acerto das questões colocadas, tenham sido através da adição ou subtração dos numeradores quando as frações apresentavam denominadores iguais, ou encontrando primeiramente frações equivalentes para, em seguida, efetuar as operações necessárias, ou através do cálculo por estimação, ou ainda através do uso do modelo linear de barras. Foram categorizadas como incorretas as estratégias que apresentaram manipulação dos numeradores e denominadores das frações como sendo números naturais, somando-os ou subtraindo-os diretamente, sem calcular as frações equivalentes quando necessário, ou que encontraram frações equivalentes incorretamente acarretando erro na soma ou subtração, ou que fizeram a representação visual através do modelo linear de barras de forma indevida, ou ainda, que demonstraram falta de atenção acarretando justificações incorretas ou respostas sem justificações (categoria O15 – Outras) (Quadro 5).

Quadro 5 – Categorização – Operações de adição e subtração de frações

Operações de Adição e Subtração de Frações		
	Estratégias Corretas	**Estratégias Incorretas**
Frações com Denominadores Iguais	**(O1)** Repetir o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\right)$ **(O2)** Repetir o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\right)$, após reconfigurar a unidade – Tarefa 18	**(O8)** Adicionar ou subtrair os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números naturais $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm b}\right)$
Frações com Denominadores Diferentes	**(O3)** Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c **(O4)** Fazer a multiplicação cruzada entre numeradores e denominadores, somando os resultados encontrados, e multiplicar os denominadores entre si, simplificando o resultado, quando possível $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(a\ x\ d) \pm (b\ x\ c)}{b\ x\ d}\right)$ **(O5)** Adicionar ou Subtrair Frações por estimação, considerando os valores de referência $\frac{1}{2}$ e 1 **(O6)** Representar a adição ou a subtração de frações através do Modelo de Barras	**(O9)** Adicionar ou subtrair os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números naturais $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm b}\right)$ **(O10)** Calcular o denominador comum corretamente, porém, sem fazer a correspondência devida nos numeradores, adicionando ou subtraindo os numeradores originais, p.e. $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}\right)$ **(O11)** Calcular o denominador comum corretamente, porém, usando o novo denominador para fazer a correspondência nos numeradores, sem considerar o fator de multiplicação correto, p.e. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{12+24}{12} = \frac{36}{12}\right)$ **(O12)** Calcular as frações equivalentes corretamente, porém, subtraindo os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números inteiros, p.e. $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{0}\right)$ **(O13)** Estimar incorretamente a adição ou a subtração de frações **(O14)** Representar incorretamente a adição ou a subtração de frações no Modelo de Barras **(O15)** Outras
	(O7) Representar corretamente as frações – Questão 18	**(O16)** Representar incorretamente / parcialmente as frações – Questão 18

5- Análise dos dados

Neste capítulo são analisadas as resoluções dos alunos para as tarefas propostas na unidade de ensino. Considerando, porém, o número total de tarefas efetivamente aplicadas, a apresentação da análise de todas poderia acarretar um excesso de informações que pouco agregaria ao estudo, correndo o risco de torná-lo redundante em certos aspectos, uma vez que algumas das tarefas, por objetivarem a consolidação do conhecimento, revelaram estratégias similares empregadas pelos alunos para as solucionarem. Portanto, optei por escolher para compor este estudo as tarefas de números: (i) 3, 6 e 9, correspondentes a equivalência de frações, (ii) 12, 15 e 16, referentes a comparação de frações, (iii) 17, envolvendo adição de frações por estimação, e (iv) 18, 21, 23, 25 e 27, sobre adição e subtração de frações, cujas estratégias de solução apresentam um maior potencial de análise, tanto no que respeita as linhas de raciocínio como as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao solucioná-las, e que entendo vir ao encontro às questões de investigação propostas.

Durante a fase de análise das tarefas escolhidas, os quadros de categorização das estratégias usadas pelos alunos, corretas ou incorretas, foram sendo reelaborados de forma a contemplar todas as estratégias identificadas. Para cada tarefa analisada, visando facilitar a leitura, destaco as categorias em que as estratégias dos alunos foram classificadas (quadros de especificação das estratégias de resolução), encontrando-se a totalidade de categorias no capítulo anterior, destinado à Metodologia da Investigação. Ao fim da análise de cada tarefa, elaboro uma síntese através da qual procuro evidenciar os pontos que se sobressaíram na exploração das mesmas, especialmente os que estão diretamente relacionados às questões do estudo: as estratégias de resolução usadas pelos grupos, as dificuldades evidenciadas e o potencial uso do modelo linear de barras como apoio para a aprendizagem das operações de adição e subtração de números racionais na representação fracionária

5.1 - Tarefa 3 – Equivalência de frações

Esta tarefa está dividida em duas questões: na primeira, é solicitado aos alunos que representem a fração $\frac{2}{3}$ em uma barra já dividida em seis partes iguais. A segunda questão apresenta uma barra vazia e pede-se aos alunos que representem os mesmos $\frac{2}{3}$ por outra fração, diferente daquela representada na primeira questão.

Quadro 6 - Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 3 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1-a	E3	-----	E3	E7	E8
1-b	-----	-----	E2	E8	-----

Quadro 7 - Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 3 pelos grupos da turma 502

(i) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1-a	E7	E7	-----	E7	E8
1-b	E8	E8	E8	E8	E8

Quadro 8 - Especificação das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 3

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
E2 – Representar a equivalência de frações através do Modelo de Barras **E3** - Fazer a equivalência de frações corretamente, porém sem justificação ou com justificação indevida	**E7** - Não estabelecer ou estabelecer relações incorretas de equivalência ao relacionar representações visuais e simbólicas **E8** - Representar incorretamente a equivalência de frações através do Modelo de Barras

Esta foi a última tarefa trabalhada no primeiro dia de aplicação da unidade de ensino e, ao contrário das duas primeiras que obtiveram quase unanimidade de acertos, apresentou elevado índice de erros em ambas as questões propostas: (i) na primeira questão, 60% de erros, 20% de acertos e 20% sem resolução; (ii) na segunda questão, 60% de erros, 10% de acertos e 30% sem solução.

Na primeira questão (letra a), dentre as soluções corretas está a do grupo C que, apesar de haver apresentado a fração $\frac{4}{6}$, equivalente a $\frac{2}{3}$, não informa em sua justificação que estratégia o grupo utilizou para encontrá-la, nem faz uso da barra desenhada para demonstrar a equivalência (Figura 18).

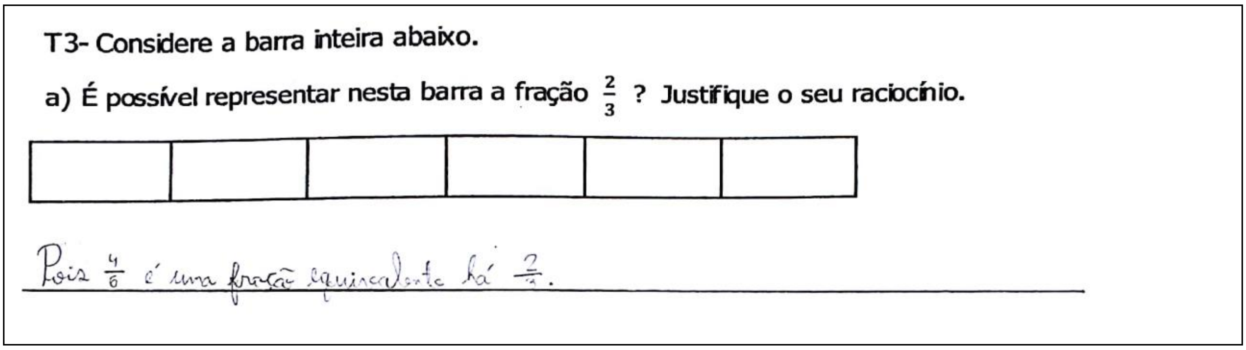


Figura 18 – T3 – questão: a – grupo C - representação visual correta sem justificação

Por sua vez, o grupo A também apresenta solução correta para a primeira questão ao utilizar a barra desenhada e sombrear quatro das seis partes em que estava pré-dividida, representando, dessa forma, a fração $\frac{4}{6}$. Porém, ao justificar a estratégia usada, comete uma falha ao informar que “$\frac{2}{3}$ é equivalente a qualquer fração com denominador 6”. Tal justificação não nos permite concluir se o grupo ainda não havia se apropriado corretamente dos conceitos inerentes à equivalência de frações, ou se a própria apresentação da barra já dividida em seis partes havia contribuído para que os alunos percebessem visualmente, e de forma mais intuitiva do que lógica, as relações entre as partes. Outra questão que se coloca como dúvida é o fato de que, aparentemente, os alunos desse grupo ainda não possuírem, até esse momento, a compreensão do número fracionário como sendo um único valor, uma vez que para eles qualquer fração que apresente o denominador 6, independentemente do numerador, será uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$, o que pode sinalizar que para esses alunos o numerador e o denominador ainda são percebidos como dois números independentes, sem ligação entre si (Figura 19).

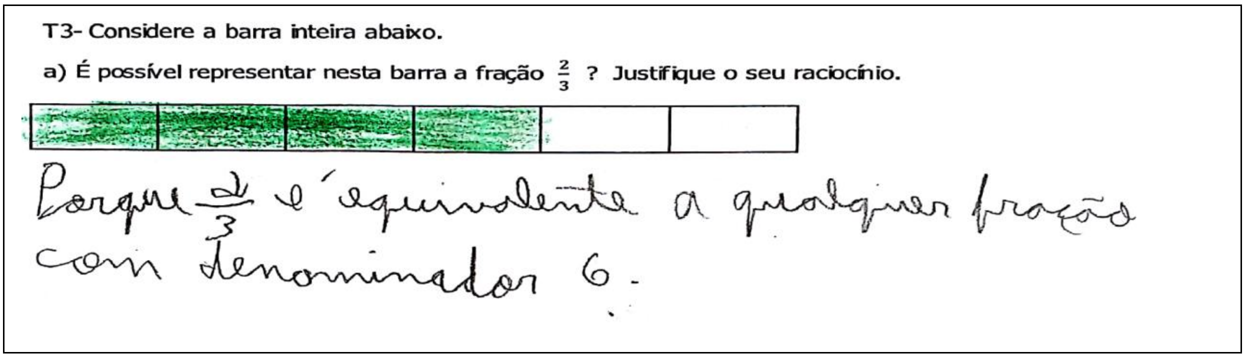


Figura 19 – T3 – questão: a – grupo A - representação visual correta com justificação errada

Dentre os restantes grupos que responderam incorretamente à primeira questão, a maior parcela justificou informando não ser possível representar a fração $\frac{2}{3}$ em uma barra dividida em seis partes, denotando não apropriação correta do conceito básico de equivalência de frações, conforme respostas dadas pelos grupos F e D (fig. 20 e 21).

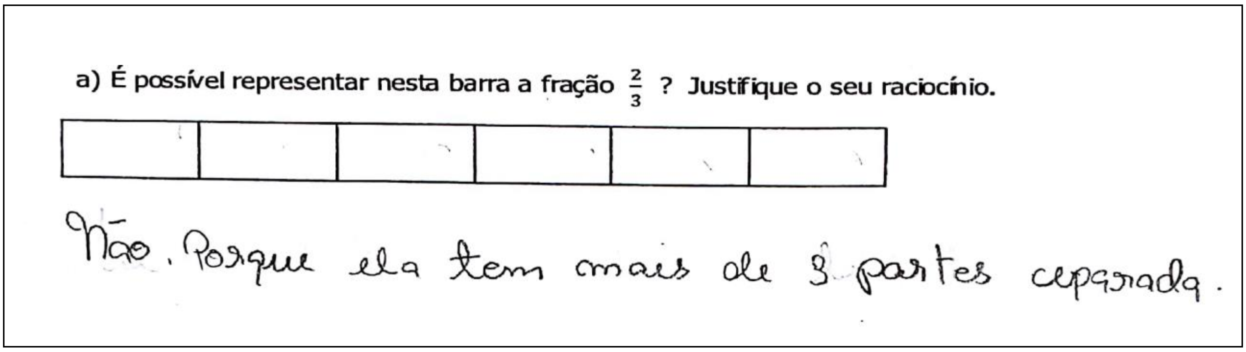


Figura 20 – T3 – a – grupo F – resposta incorreta

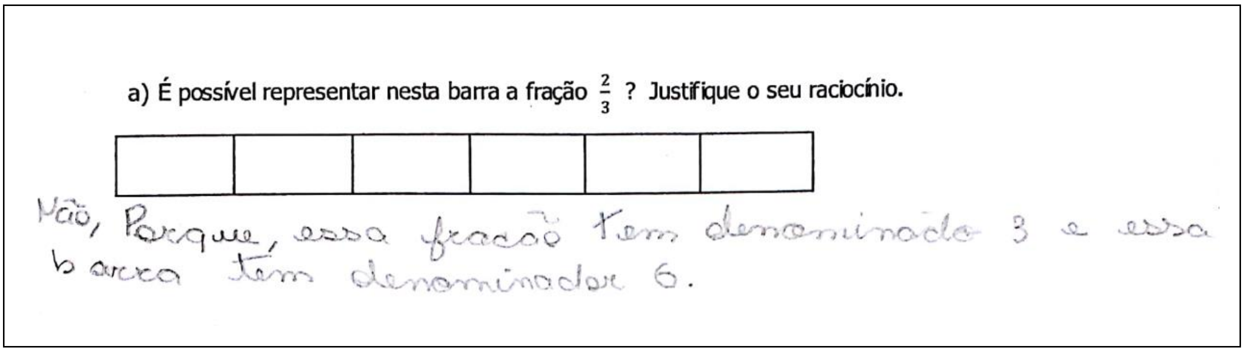


Figura 21 – T3 – a – grupo D – resposta incorreta

O Grupo E também evidenciou não conseguir fazer a representação solicitada ao dividir pela metade a barra já repartida em seis, ao que tudo indica considerando uma outra unidade, correspondendo ao denominador 3, e sombreando duas partes de um lado, o que caracterizaria o numerador 2 (vide figura 22).

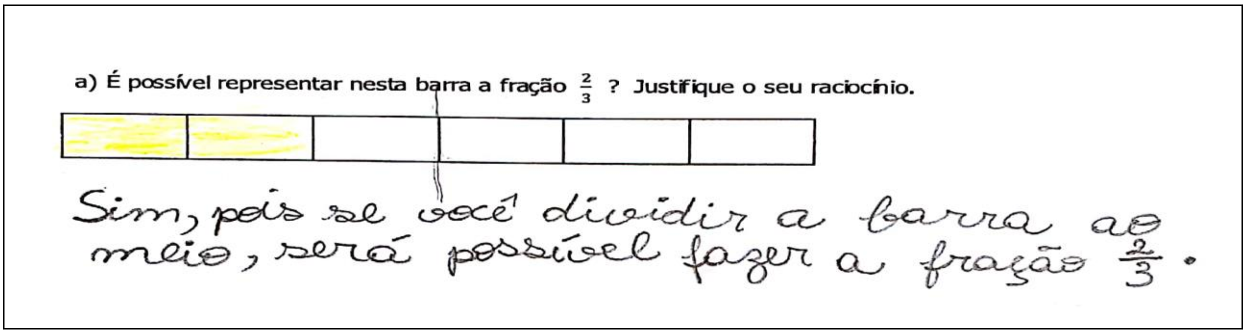


Figura 22 – T3 – questão a – grupo E – resposta incorreta

Em relação à segunda questão, apenas o grupo C respondeu corretamente ao dividir a barra vazia em 12 partes e sombrear 8 delas, indicando correta apropriação dos conceitos de equivalência de frações $\left(\frac{2}{3} = \frac{8}{12}\right)$, apesar das partes divididas não apresentarem tamanhos iguais, devido a imprecisão no desenho (figura 23).

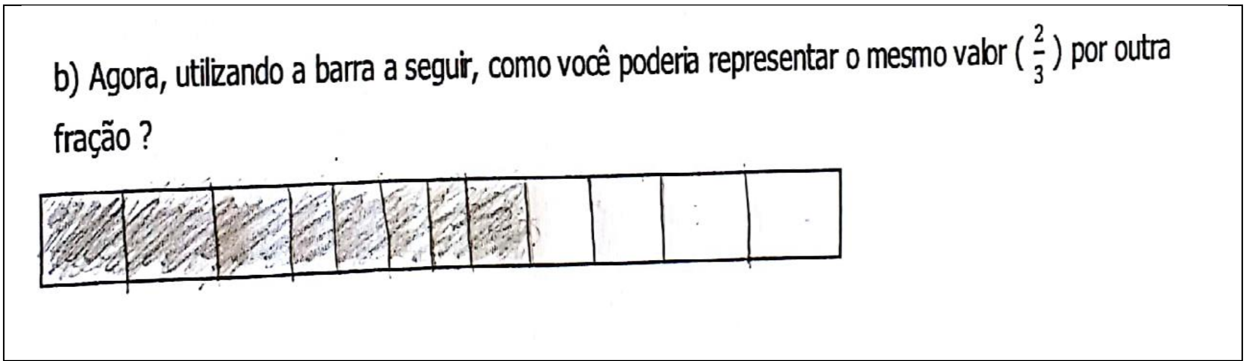


Figura 23 – T3 – b – grupo C – resposta correta – representação visual

Cinco grupos (D, G, H, I e J) dividiram a barra em três partes sombreando duas delas, representando a fração $\frac{2}{3}$ original, não atendendo ao solicitado no enunciado e não encontrando uma fração equivalente, conforme demonstrado pela resposta do grupo I (Figura 24).

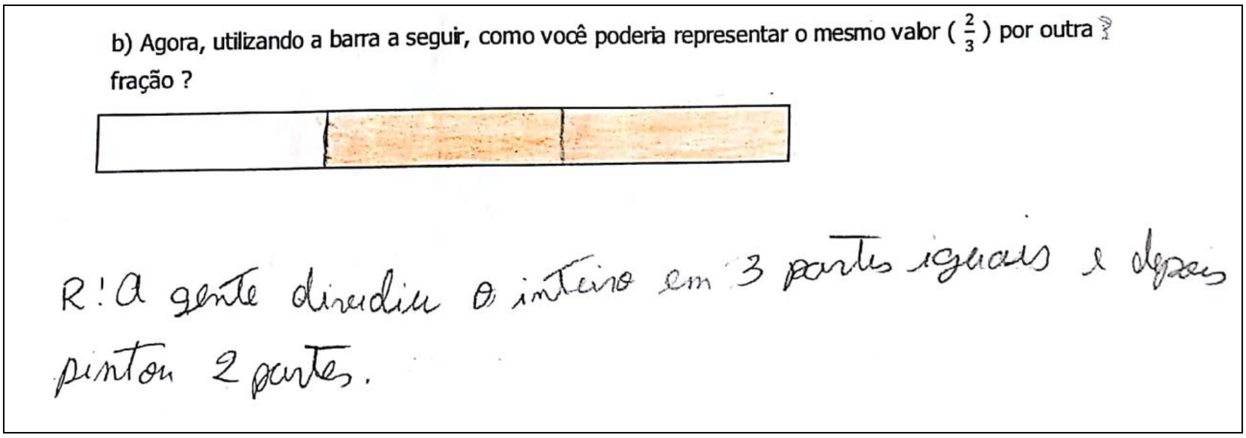


Figura 24 – T3 – b – grupo I – resposta incorreta – representação visual

O grupo F representou a fração $\frac{4}{6}$ que deveria ter sido representada na 1ª questão, uma vez que a barra já se encontrava dividida em seis partes (figura 25). Curiosamente, este grupo respondeu na primeira questão que era impossível representar a fração $\frac{2}{3}$ uma vez que a barra estava dividida em mais de três partes.

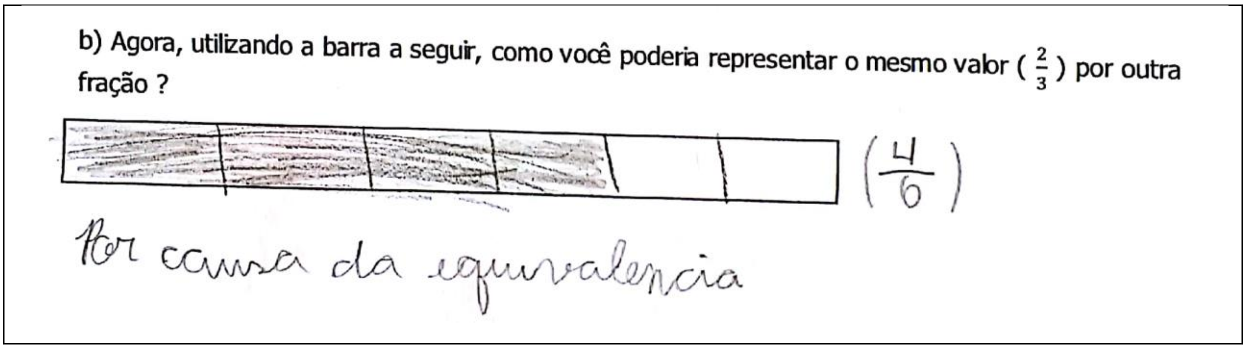


Figura 25 – T3 – b – grupo F – resposta incorreta – representação visual

Os grupos restantes (A, B e E) não apresentaram soluções para essa questão.

Em síntese, na primeira questão da tarefa, as justificações dadas pelos alunos apontam para uma reduzida compreensão dos conceitos básicos de equivalência de frações ao se relacionarem, concomitantemente, as representações simbólica e visual. Os alunos demonstraram dificuldade em fazer a transição do valor simbólico para a barra, não percebendo que a divisão da barra em seis partes era equivalente ao dobro do denominador da fração original ($\frac{2}{3}$) e que, portanto, bastava sombrear quatro dessas partes para representar o dobro do numerador da fração.

Na 2ª questão, a barra desenhada não apresentava qualquer divisão e a maioria dos grupos optou por fazer a representação da fração original, repartindo a barra em três partes e sombreando duas, apesar do enunciado solicitar uma representação equivalente. Como as duas questões se inter-relacionavam, os erros cometidos na primeira podem ter influenciado os alunos aos erros incorridos na segunda questão.

A utilização do modelo linear de barras, especialmente na primeira questão em que a barra já se encontrava dividida em seis partes, parece ter criado uma maior dificuldade para os alunos, ao invés de apoiá-los em seus processos de resolução, como se objetivava. Tendo em vista que esta era a primeira aula em que os alunos estavam retomando o contacto com os conceitos de equivalência de frações, vistos por eles uma única vez antes do recesso escolar do meio do ano letivo, parte desse elevado índice de erros pode ser atribuído a uma ainda embrionária consolidação de conhecimentos acerca desse tópico, aliado ao fato desta ser também a primeira ocasião em que estavam utilizando o modelo linear de barras.

5.2 – Tarefa 6 – Equivalência de frações – representação na reta numérica

A tarefa 6 apresenta uma reta numérica com o intervalo entre 0 e 1 dividido em seis partes iguais. Na parte superior da reta está representado o ponto correspondente a $\frac{1}{3}$ e na parte inferior o ponto correspondente a $\frac{1}{6}$. A questão solicita que, utilizando a reta numérica, os alunos representem a fração equivalente a $\frac{1}{3}$.

Quadro 9 - Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 6 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1	E9	E9	E9	E4	E4

Quadro 10 - Estratégias de resolução utilizadas na tarefa 6 pelos grupos da turma 502

(i) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1	E4	E4	E4	E4	E9

Quadro 11 - Especificação das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 6

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
(E4) Determinar e representar corretamente a equivalência de frações na reta numérica	**(E9)** Determinar e representar na reta numérica frações equivalentes incorretamente, apresentando falhas na compreensão da unidade e da sua partição, além de multiplicar os termos da fração original sem observar as regras de equivalência

O índice de acertos nessa tarefa alcançou 60%. Todos os grupos restantes (40%) apresentaram soluções erradas sugerindo falhas na compreensão do conceito de unidade e das diferentes partições possíveis.

Esta foi a primeira tarefa trabalhada na terceira aula da Unidade de Ensino e, também, foi a primeira das três tarefas em que os alunos teriam que utilizar a reta numérica como suporte para as suas respostas. Dos seis grupos que solucionaram corretamente, três fizeram uso do algoritmo para determinar à fração equivalente a $\frac{1}{3}$, não utilizando a reta numérica e suas divisões para responder à pergunta (figura 26).

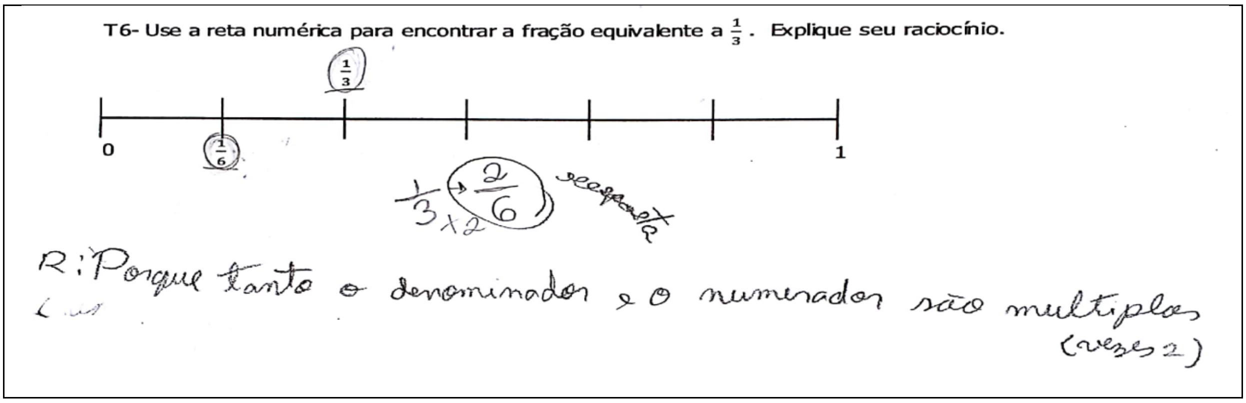


Figura 26 – T6 – grupo I – resposta correta

Os outros três grupos que responderam corretamente a questão usaram a reta numérica fazendo a correspondência entre os números de partições indicadas na parte superior e inferior da reta, sugerindo compreensão da representação visual apropriada (figura 27)

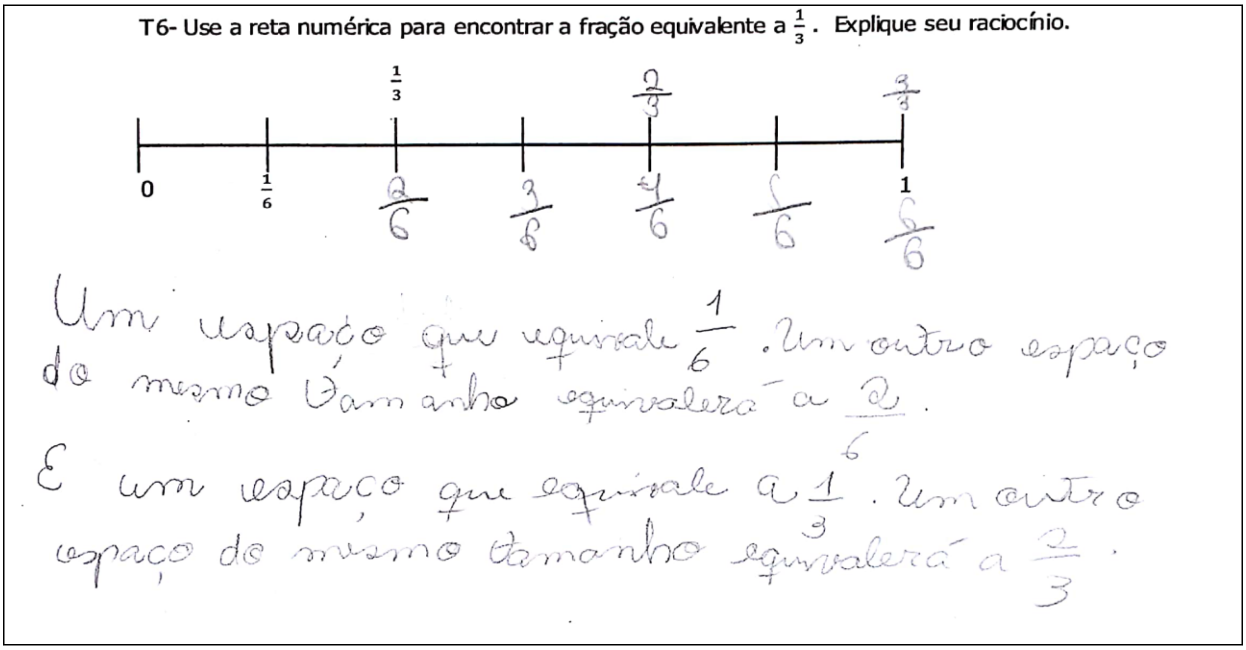


Figura 27 – T6 – grupo H – resposta correta

Pelas respostas dadas por dois grupos que responderam indevidamente à questão, observa-se apropriação indevida do conceito de unidade e de suas partições, uma vez que, apesar da reta estar dividida em seis partes e na primeira marcação da parte inferior da reta estar representada a fração $\frac{1}{6}$, os alunos calcularam frações equivalentes a $\frac{1}{6}$ para fazerem as representações nas demais marcações (figura 28).

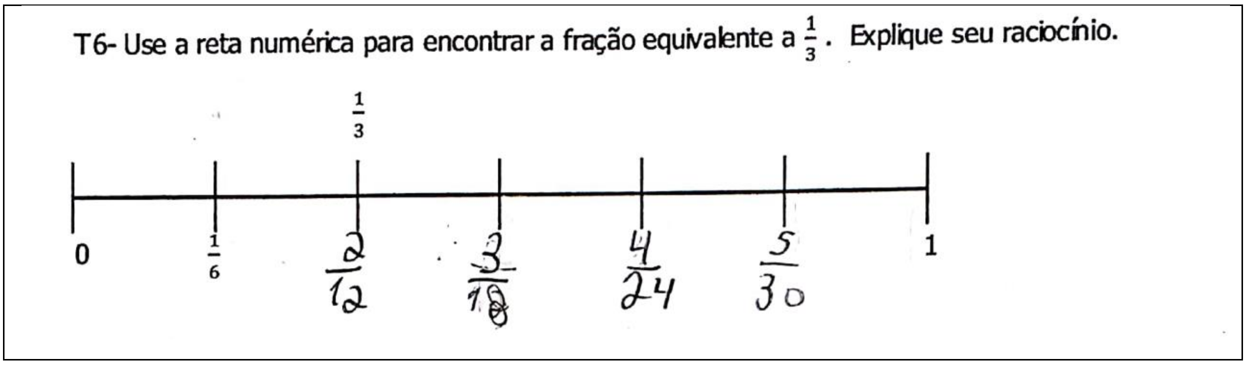


Figura 28 – T6 – grupo B – resposta incorreta

Os dois grupos restantes tentaram apoiar as suas estratégias no modelo linear de barras, um deles inclusive colocando-as justapostas favorecendo a percepção da equivalência; no entanto, não levaram adiante a análise, apresentando um registro simbólico aparentemente sem sentido e deixando, por fim, a tarefa sem solução (figura 29).

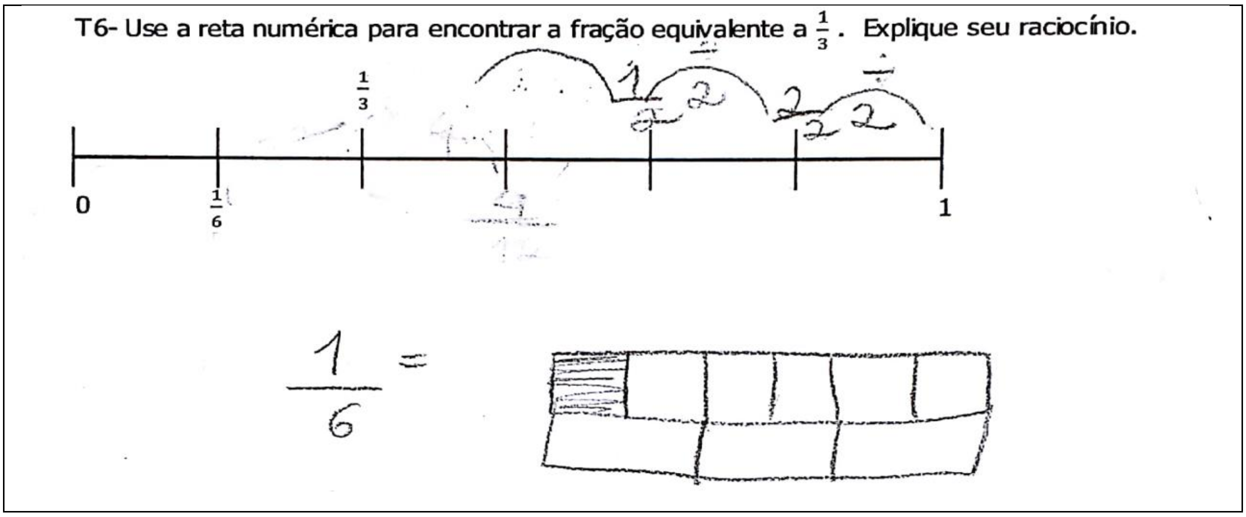


Figura 29 – T6 – grupo C – resposta incorreta

Em síntese, apesar desta ter sido a primeira das três tarefas em que os alunos estavam sendo expostos à representação da equivalência de frações na reta numérica, o percentual de acertos alcançou 60% do total de grupos, dentre os quais três apoiaram suas estratégias exclusivamente na reta e nas partições já representadas, pelo que indicam as suas respostas. Por outro lado, os erros cometidos pelos quatro grupos que responderam incorretamente à questão, parecem apontar para uma ainda frágil construção do conceito de unidade e o que cada possível divisão desta unidade representa desse “todo”.

Outro fator que pode ter contribuído para os erros praticados foi justamente o fato de ter sido esta a primeira tarefa em que os alunos estavam tendo contacto com a reta numérica e, além do mais, por terem que representar frações equivalentes nesta reta, o que pode ter acarretado um maior constrangimento para estes grupos de alunos que, ao lerem no enunciado da questão, que deveriam “encontrar a fração equivalente a $\frac{1}{3}$”, optaram por calcular diretamente todas as frações equivalentes correspondentes às divisões representadas na parte inferior da reta, desconsiderando o real significado das partições da unidade em questão.

Nesta tarefa a maioria dos grupos não recorreu ao modelo linear de barras para apoiar as suas linhas de raciocínio, talvez por ainda não estarem acostumados a estabelecer relações entre duas ou mais representações entre si, o que poderia ter sido um poderoso alicerce para a resolução da questão, caso os alunos tivessem percebido que as representações das partições da reta (denominador três na parte superior e seis na parte inferior da reta) poderiam ser desdobradas em duas barras de mesmo tamanho e divididas em três e em seis partes iguais e que, ao serem colocadas justapostas, possibilitariam fácil e rápida visualização da equivalência de frações existente.

5.3 – Tarefa 9 – Equivalência de frações

A tarefa 9 apresenta duas barras justapostas divididas em 18 quadrados iguais, com alguns desses quadrados sombreados apenas em suas metades e outros integralmente, e solicita que os alunos verifiquem se a área sombreada total corresponde à fração $\frac{4}{9}$.

Quadro 12 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 9 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1	E7	E7	E2	E7	E7

Quadro 13 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 9 pelos grupos da turma 502

(i) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1	E7	E7	E2	E7	E7

Quadro 14 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 9

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
E2 – Representar a equivalência de frações através do Modelo de Barras	**E7** - Não estabelecer ou estabelecer relações incorretas de equivalência ao relacionar representações visuais e simbólicas

Nesta tarefa, o índice de acertos foi de 20% e o de erros, 80%. Todos os grupos cometeram o mesmo tipo de erro, ao estabelecerem relações incorretas de equivalência ao relacionarem as representações visuais e simbólicas (categoria E6).

Tendo sido trabalhada na terceira aula, esta tarefa foi a última de quatro tarefas propostas nesse dia. Diferentemente das anteriores, nas quais as barras já se encontravam divididas e com as partes à que se referiam já sombreadas totalmente ou sem qualquer divisão ou sombreamento, a nona tarefa apresentava uma novidade por apresentar partes sombreadas parcialmente (ao meio) e outras sombreadas em sua totalidade, demandando uma maior compreensão visual por parte dos alunos, que precisavam perceber que dois quadrados sombreados pela metade (cada um) representavam um quadrado sombreado no total.

Dois grupos (C e H) responderam corretamente a tarefa e ambos justificaram suas linhas de raciocínio utilizando o conceito básico de equivalência indicando que $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ (Figuras 30 e 31).

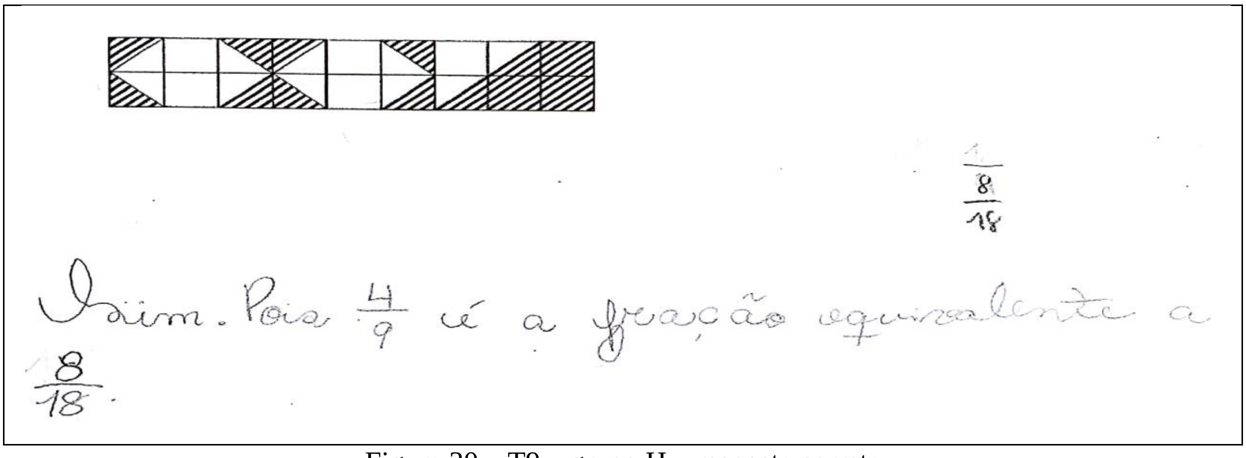


Figura 30 – T9 – grupo H – resposta correta

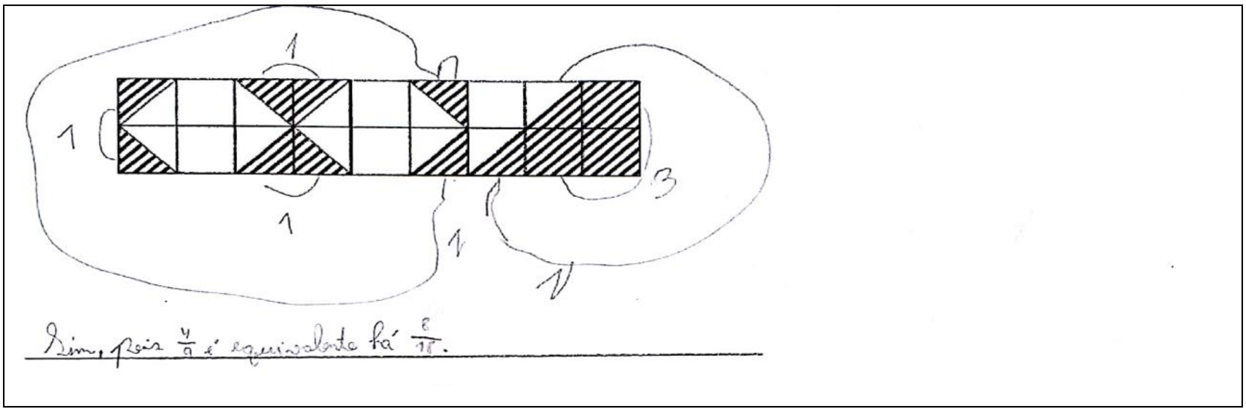


Figura 31 – T9 – grupo C – resposta correta

Quanto aos demais grupos que apresentaram soluções incorretas, pela análise dos resultados obtidos constata-se que os alunos encontraram dificuldades não por constrangimentos à percepção visual das barras e suas divisões, e sim pela determinação errada dos valores do numerador e do denominador da fração correspondente, o que pode ter sido acarretado por uma interpretação indevida do significado parte-todo.

Tal percepção é reiterada ao analisarmos as soluções apresentadas pelos grupos D (figura 32) e I (figura 33) que, apesar de haverem representado corretamente os numeradores correspondentes às partes sombreadas, configurando clara percepção visual, erraram ao determinarem por 10 o denominador da fração, computando apenas o total de quadrados sem preenchimento, ficando caracterizado que esses alunos ainda não se apropriaram devidamente do significado de unidade, do "todo" a que se refere a tarefa e, por conseguinte, do significado do subconstructo parte-todo.

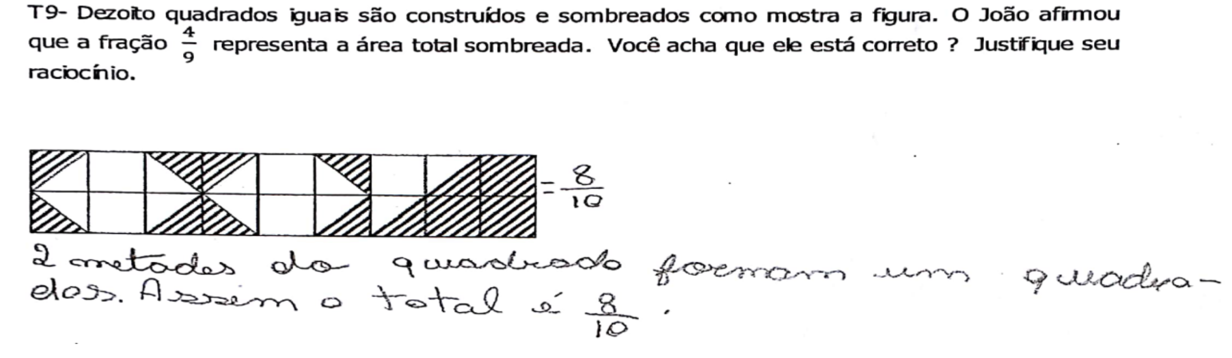


Figura 32 – T9 – grupo D – resposta incorreta

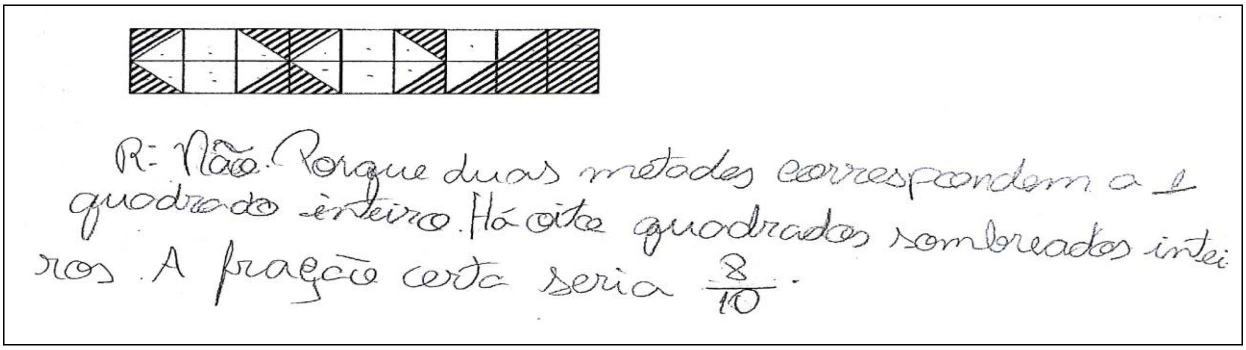


Figura 33 – T9 – grupo I – resposta incorreta

Já o grupo F demonstra, pela justificação dada, falha na compreensão do conceito de equivalência de frações, apesar de representar corretamente a relação entre as partes sombreadas e o total de partes da figura (Figura 34).

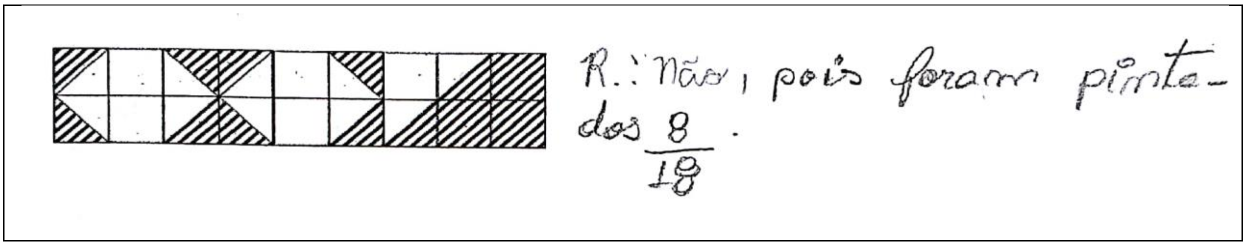


Figura 34 – T9 – grupo F – resposta incorreta

Por sua vez, o grupo J começa por contar o total de quadrados em que as barras foram divididas, informando as quantidades de quadrados sombreados e de quadrados “pintados” (nas palavras dos próprios alunos do grupo), porém, sem diferenciar àqueles que se encontram sombreados pela metade. Em seguida, representam em uma barra, ao que tudo indica, os oito quadrados sombreados, apesar de não ter ficado claro como os alunos chegaram a essa conclusão, e representam corretamente a relação entre as partes pela fração $\frac{8}{18}$. No entanto, justificam de forma equivocada a “possível” existência de equivalência, ao que tudo indica considerando o dobro (ou a metade) como fator de equivalência entre as frações, subtraindo os numeradores entre si (8 – 4 = 4) e adicionando os denominadores, pois, cada barra foi repartida em nove quadrados (9 + 9 = 18) (Figura 35).

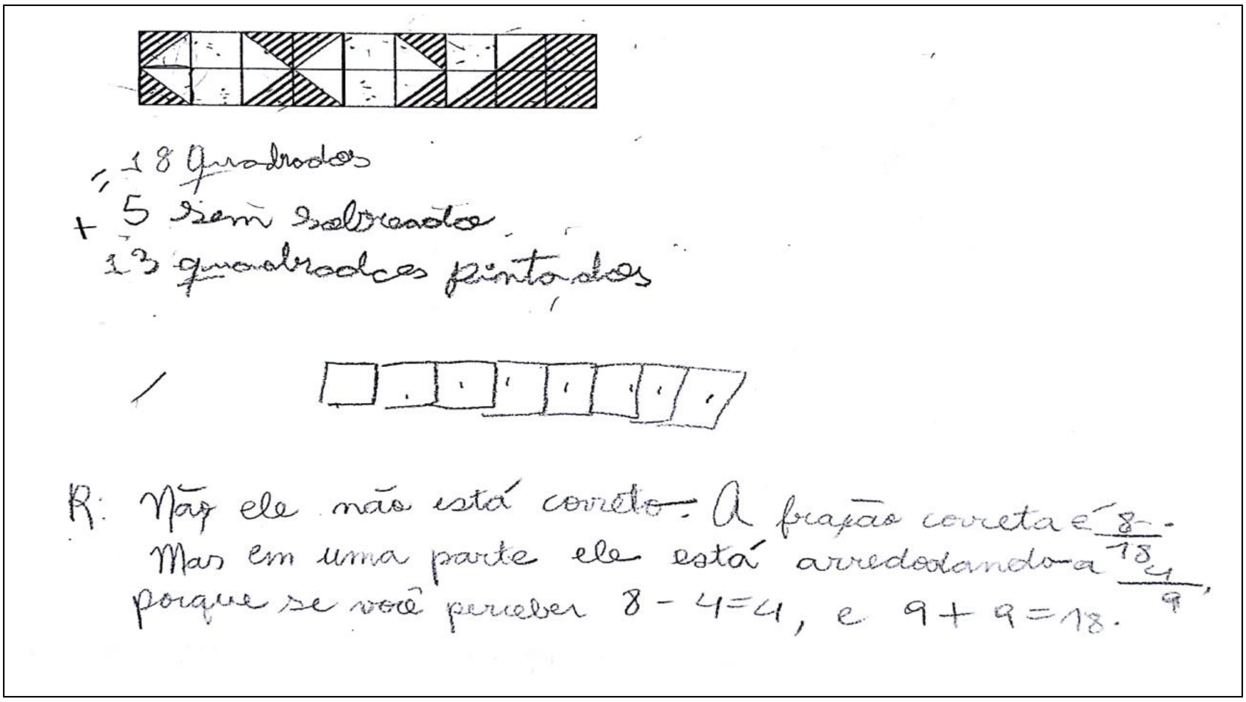


Figura 35 – T9 – grupo J – resposta incorreta

Em síntese, por apresentar uma configuração diferente das tarefas anteriormente trabalhadas e por requerer uma maior acuidade visual dos alunos, a tarefa 9 pode ter constituído um grau de dificuldade mais elevado para eles. Contudo, as dificuldades mais relevantes encontradas remetem a falhas na apropriação do conceito de equivalência de frações, bem como na compreensão dos significados da unidade e do subconstructo parte-todo, haja visto alguns grupos não terem representado no denominador o total de partes em que as barras estavam divididas, tendo, no entanto, feito a representação da fração que relaciona as partes sombreadas e as não sombreadas (significado parte-parte).

5.4 – Tarefa 12 – Comparação de frações

A tarefa 12 apresenta um problema contextualizado onde dois amigos correram distâncias diferentes de uma mesma pista, representadas pelas frações $\frac{6}{7}$ e $\frac{13}{14}$, em que os alunos necessitam de fazer a comparação entre estas frações.

Quadro 15 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 12 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1	C11	C11	C2	C11	C8*

Quadro 16 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 12 pelos grupos da turma 502

(i) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1	C8*	C3	C3	C8*	-----

* C8 – os grupos responderam corretamente, porém, com justificações incorretas.

Quadro 17 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 12

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
C2 – Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c., reescrevendo-as e comparando os novos numeradores corretamente **C3** – Representar as frações indicadas através do Modelo Linear de Barras, comparando os resultados encontrados visualmente	**C8** – Comparar os numeradores e / os denominadores originais das frações, como se fossem números independentes (números naturais) **C11** – Outras

Os resultados obtidos nesta tarefa totalizaram: (i) 30% de acertos, sendo 20% pelo modelo linear de barras e 10% pelo cálculo de frações equivalentes; (ii) 60% de erros, dos quais a metade dos grupos respondeu corretamente à pergunta formulada, por meio de estratégias incorretas; (iii) e 10% não respondeu à tarefa.

Esta foi a primeira das tarefas trabalhadas envolvendo comparação de frações com denominadores diferentes. Dos três grupos que responderam corretamente, os grupos G e H apoiaram suas soluções na representação visual através do modelo linear de barras, como pode ser visto na figura 36, na qual o grupo H soluciona a tarefa representando as distâncias percorridas pelos amigos ao desenhar duas barras de igual tamanho, nas quais fez a representação das frações indicadas. Assim, os alunos conseguiram uma visualização fácil e correta do percurso percorrido por cada amigo, possibilitando a correta comparação entre eles. A mesma estratégia foi usada pelo grupo G.

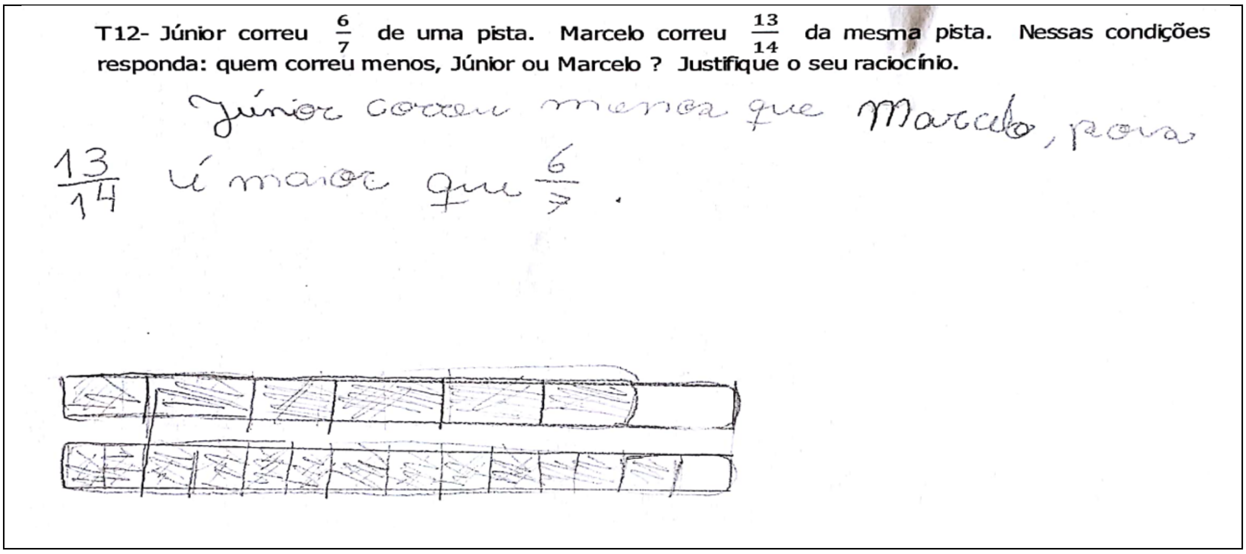


Figura 36 – T12 – grupo H – resposta correta com modelo de barras

Por sua vez, o grupo C optou por utilizar a representação simbólica, calculando a equivalência entre as frações através do m.m.c. entre os denominadores originais (7 e 14) pelo processo de decomposição simultânea, encontrando $\frac{12}{14}$ para a fração $\frac{6}{7}$ (percurso do Júnior) e fazendo a comparação necessária com a fração $\frac{13}{14}$ (percurso do Marcelo), solucionando a tarefa com correção (Figura 37).

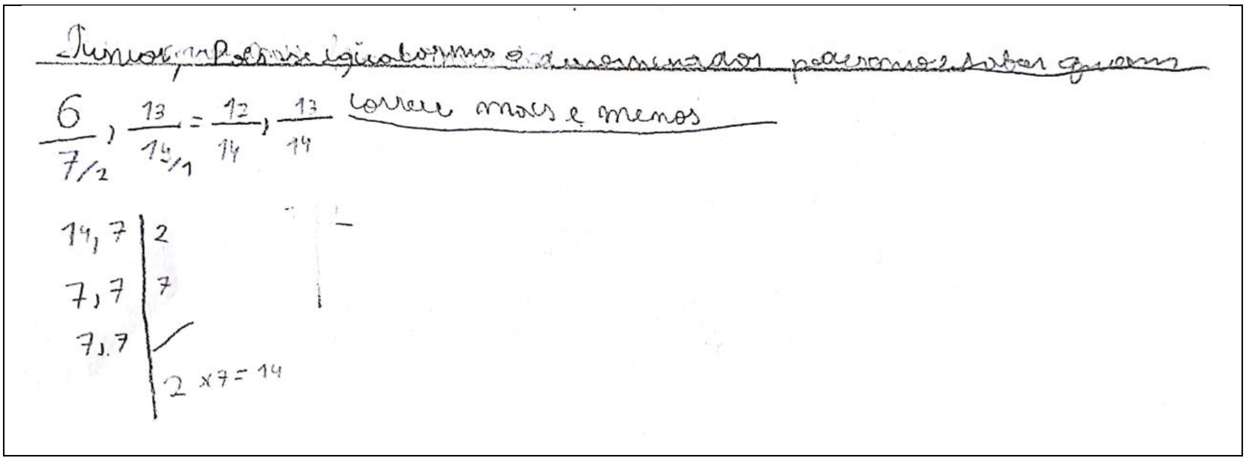


Figura 37 – T12 – grupo C – resposta correta – representação simbólica

Os grupos E, F e I, apesar de responderem corretamente à pergunta, apresentaram justificações equivocadas remetendo à utilização de estratégias erradas, e por esta razão foram classificados na categoria C8. O grupo E indica, pela demonstração do cálculo efetuado, que possivelmente ainda não haviam compreendido integralmente o significado de número racional e, consequentemente, não ter se apropriado do conceito de frações equivalentes, utilizando os procedimentos de cálculo pertinentes ao conjunto dos números naturais, ao tratar os termos das frações de forma independente, subtraindo os numeradores e os denominadores entre si. Ao efetuarem essas operações, subtraindo o que Júnior havia percorrido $\left(\frac{6}{7}\right)$ do que Marcelo havia percorrido $\left(\frac{13}{14}\right)$, estes alunos encontraram $\left(\frac{7}{7}\right)$ por resultado, e concluíram que como $\frac{7}{7}$ é maior que $\frac{6}{7}$, logo Júnior havia percorrido uma distância menor (Figura 38).

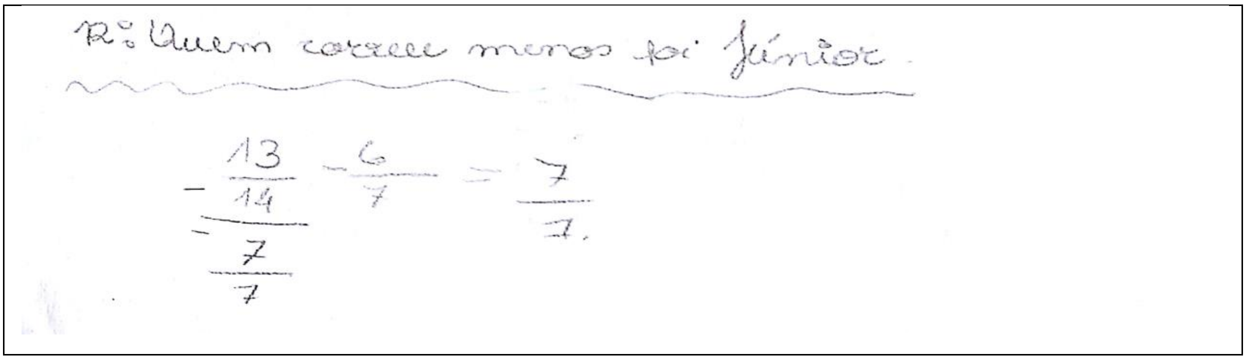


Figura 38 – T12– grupo E – resposta incorreta

O grupo I também demonstra falha na apropriação dos conceitos de número racional, do significado de unidade e de equivalência de frações, ao justificar sua solução comparando os denominadores das frações originais, nem sequer percebendo que um dos denominadores é o dobro (ou a metade) do outro (Figura 39).

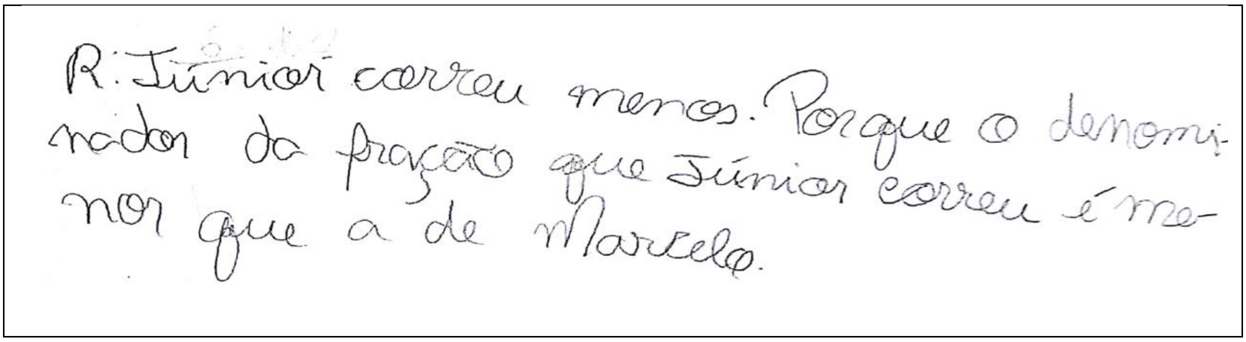


Figura 39 – T12 – grupo I – resposta incorreta

Os grupos A e B revelaram falta de atenção / dificuldade de raciocínio e o grupo J não respondeu à pergunta.

Em síntese, a análise dos erros cometidos nessa tarefa parece apontar para a influência que as características e particularidades dos números naturais ainda exercem em alguns grupos de alunos, haja vista terem utilizados procedimentos de cálculo pertinentes a esse conjunto numérico (subtração direta dos numeradores e dos denominadores entre si) para encontrar a diferença entre as distâncias percorridas entre os dois amigos, sugerindo também que a compreensão do significado de número racional e do que representa a unidade (o inteiro, o "todo") nesse tipo de problema, ainda não foram devidamente apropriados por estes alunos.

O modelo linear de barras foi utilizado por dois grupos de alunos como estratégia de solução, tendo se revelado bastante eficaz ao proporcionar visualização direta e de forma rápida e fácil, apoiando-os em suas conclusões.

5.5 – Tarefa 15 – Comparação de frações

Esta tarefa apresenta um contexto semelhante a da tarefa 12, porém, incluindo mais duas frações a serem comparadas, com alguns denominadores primos entre si. É uma tarefa de escolha múltipla, na qual os alunos devem escolher entre pares de amigos, que tenham feito um mesmo percurso de caminhada, até um dado momento.

Quadro 18 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 15 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1	C4	C11	C11	C4	C11

Quadro 19 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 15 pelos grupos da turma 502

(i) Turma 502

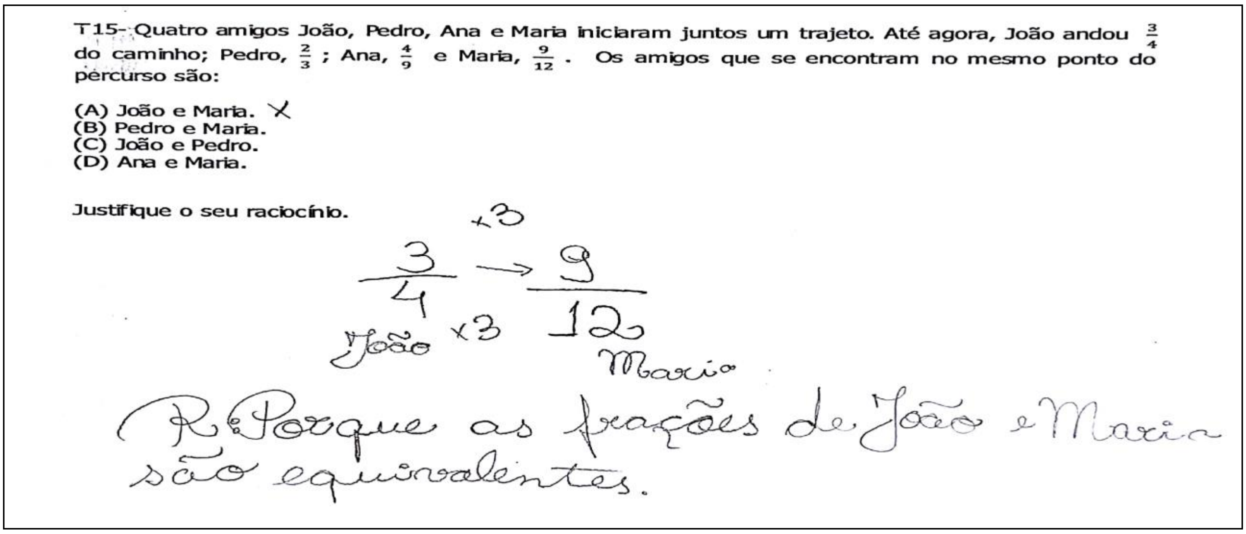
Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1	C11	C4	C4	C4	C3

Quadro 20 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 15

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
C3 – Representar as frações indicadas através do Modelo Linear de Barras, comparando os resultados encontrados visualmente **C4** Calcular frações equivalentes através de fatores de multiplicação / divisão aplicados nos numeradores e denominadores	**C11** – Outras

Na tarefa 15, 60% dos alunos responderam com exatidão e 40% apresentaram respostas incorretas, acarretadas por falta de atenção ou por não completarem suas linhas de raciocínio. Dessa forma, não houveram erros processuais ligados à falta ou a déficit de conhecimento do conteúdo avaliado.

Dos dez grupos participantes, seis responderam corretamente à tarefa, dos quais cinco calcularam as frações equivalentes através do fator de multiplicação, encontrando a solução pretendida, como pode ser vista nas resoluções dos grupos I (figura 40) e H (figura 41).


T15- Quatro amigos João, Pedro, Ana e Maria iniciaram juntos um trajeto. Até agora, João andou $\frac{3}{4}$ do caminho; Pedro, $\frac{2}{3}$; Ana, $\frac{4}{9}$ e Maria, $\frac{9}{12}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do percurso são:

(A) João e Maria. X
(B) Pedro e Maria.
(C) João e Pedro.
(D) Ana e Maria.

Justifique o seu raciocínio.

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{12}$$

João ×3 Maria

R: Porque as frações de João e Maria são equivalentes.

Figura 40 – T15 – grupo I – resposta correta – representação simbólica

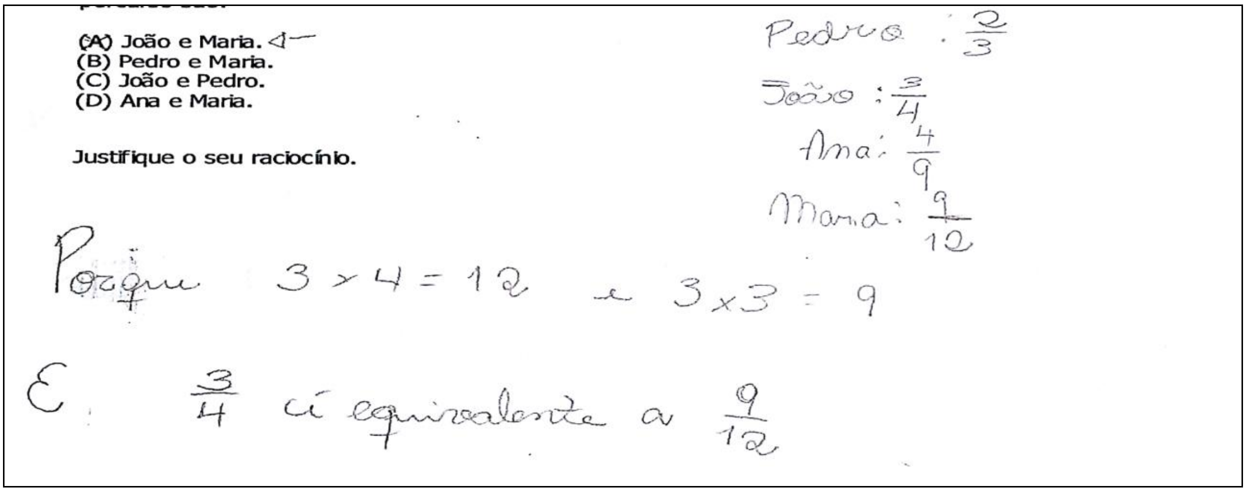


Figura 41 – T15 – grupo H – resposta correta – representação simbólica

Apenas o grupo J apoiou seu raciocínio no modelo linear de barras, representando cada fração indicada nas barras e comparando as partes sombreadas (Figura 42).

Figura 42 – T15 – Grupo J – resposta correta – modelo de barras

Os erros cometidos pelos alunos nessa tarefa não se referem a erros processuais, estando antes ligados a uma linha de raciocínio incompleta ou à falta de atenção no momento da resolução, como ocorrido com o grupo C ("pois, achando o m.m.c. e deixando e achando o quociente e o multiplicando ao numerador") (Figura 43).

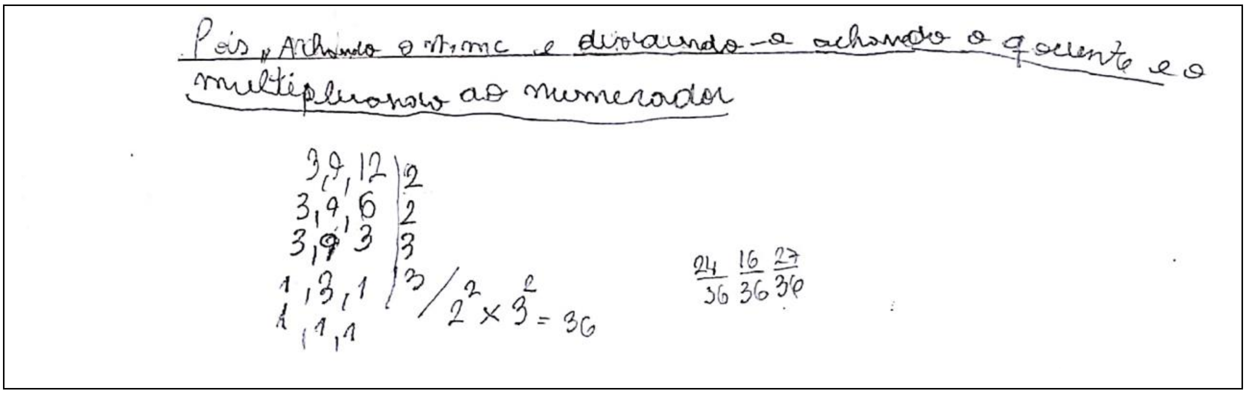


Figura 43 – T15 – grupo C – resposta incorreta

Observa-se que o grupo C não incluiu em sua análise a fração correspondente ao que João havia andado $\left(\frac{3}{4}\right)$, acarretando erro na análise final, apesar de terem demonstrado que efetuaram o cálculo do m.m.c. corretamente, através do processo de decomposição simultânea dos denominadores originais. É de ressaltar que o grupo não marcou nenhuma das respostas apresentadas, uma vez que, ao calcularem as frações equivalentes de Pedro $\left(\frac{24}{36}\right)$, Ana $\left(\frac{16}{36}\right)$ e Maria $\left(\frac{27}{36}\right)$, constataram que não havia efetivamente uma equivalência entre elas. Porém, ainda assim, não perceberam o erro pela falta de atenção que estavam cometendo. No momento da discussão com a turma, a Professora questionou ao grupo se percebiam o que estava faltando na solução apresentada e um dos componentes alegou que pouco antes de entregarem a folha da tarefa, haviam percebido que faltava incluir o João no cálculo, mas que não tiveram tempo para isso.

Em síntese, as estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução dessa tarefa evidenciam, na maioria dos casos, apropriação correta dos conceitos de equivalência e comparação de números racionais na representação fracionária. Dos grupos que acertaram a resposta, apenas um recorreu às barras para apoiar seu raciocínio, enquanto os restantes optaram pelo raciocínio aritmético, calculando as frações equivalentes através do fator de multiplicação.

Mesmo nos grupos que apresentaram soluções indevidas, há indícios de que os erros parecem ter ocorrido mais por falta de atenção dos alunos no momento da resolução do que por falhas conceituais acerca dos conteúdos avaliados.

5.6 – Tarefa 16 – Comparação de frações

A tarefa 16 solicitava aos alunos que comparassem oito frações com a fração de referência $\frac{1}{2}$, indicando aquelas que fossem maiores, justificando suas escolhas.

Quadro 21 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 16 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1	C8	C5	C5	C5	C5

Quadro 22 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 16 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1	C11	C11	C11	C5	C3

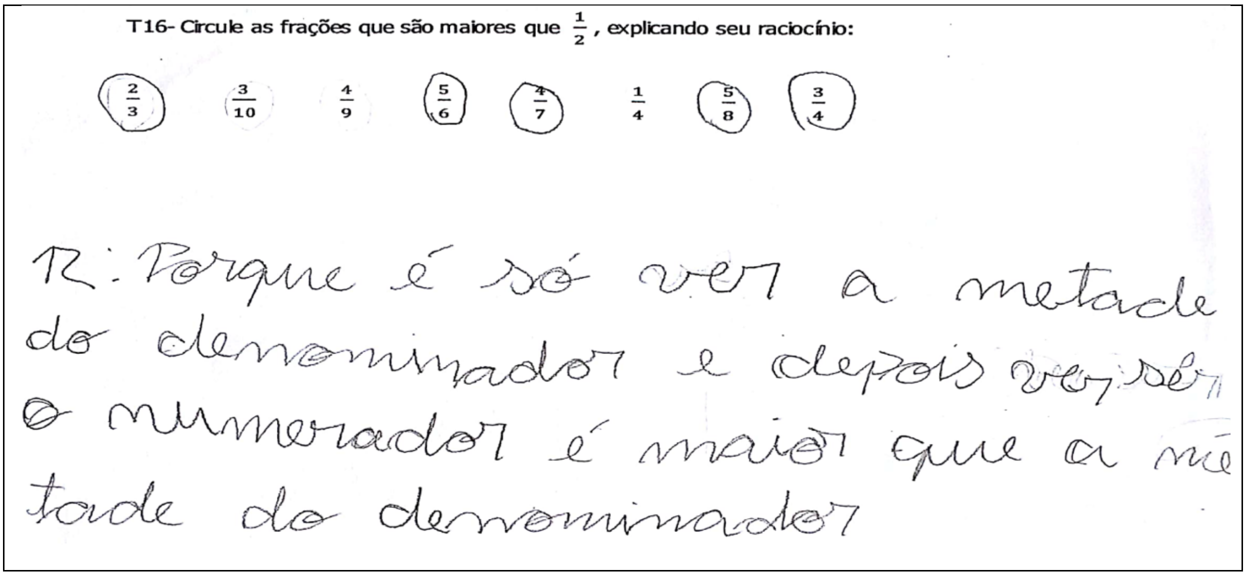
Quadro 23 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 16

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
C3 – Representar as frações indicadas através do Modelo Linear de Barras, comparando os resultados encontrados visualmente **C5** Comparar as frações com valores de referência (p.e.: $\frac{1}{2}$, 1)	**C8 –** Comparar os numeradores e / os denominadores originais das frações, como se fossem números independentes (números naturais) **C11** – Outras

Esta tarefa introduziu o conceito de valor de referência na investigação, com o propósito de verificar que linha de raciocínio os alunos seguiriam para solucioná-la: (i) se calculariam frações equivalentes para compará-las a $\frac{1}{2}$; (ii) se fariam a relação entre os numeradores e os denominadores das frações para perceberem aquelas cujos numeradores fossem maior que a metade dos denominadores e, portanto, maior que $\frac{1}{2}$; (iii) ou se usariam o Modelo Linear de Barras para representar os valores indicados.

Do total de grupos, 60% acertaram esta tarefa, dentre os quais a metade utilizou como estratégia de resolução a comparação entre os numeradores e os denominadores das frações indicadas, tendo por valor referencial a fração $\frac{1}{2}$. Dos 40% restantes que apresentaram soluções erradas, 30% utilizaram estratégias enquadradas na categoria C11, onde se incluem respostas sem justificações ou com justificações incompletas ou erradas.

Os grupos C, D, E e I solucionaram corretamente a tarefa justificando que através da análise dos numeradores e denominadores das frações haviam concluído que em uma fração sempre que o numerador fosse maior que a metade do denominador, esta fração seria maior que $\frac{1}{2}$ (Figura 44).


T16- Circule as frações que são maiores que $\frac{1}{2}$, explicando seu raciocínio:

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$

R: Porque é só ver a metade do denominador e depois ver se o numerador é maior que a metade do denominador

Figura 44 – T16 – grupo I – resposta correta

O grupo J, mais uma vez, fez uso do Modelo Linear de Barras para apoiar sua solução, apesar de ter feito a representação visual apenas para as três primeiras frações indicadas. No momento da discussão coletiva, a Professora questionou o grupo o motivo de terem parado de fazer as representações, e obteve como resposta que não acharam necessário continuar desenhando as barras, pois, haviam percebido que bastava que o numerador fosse maior que a metade do denominador para que as frações fossem maiores que $\frac{1}{2}$ (Figura 45).

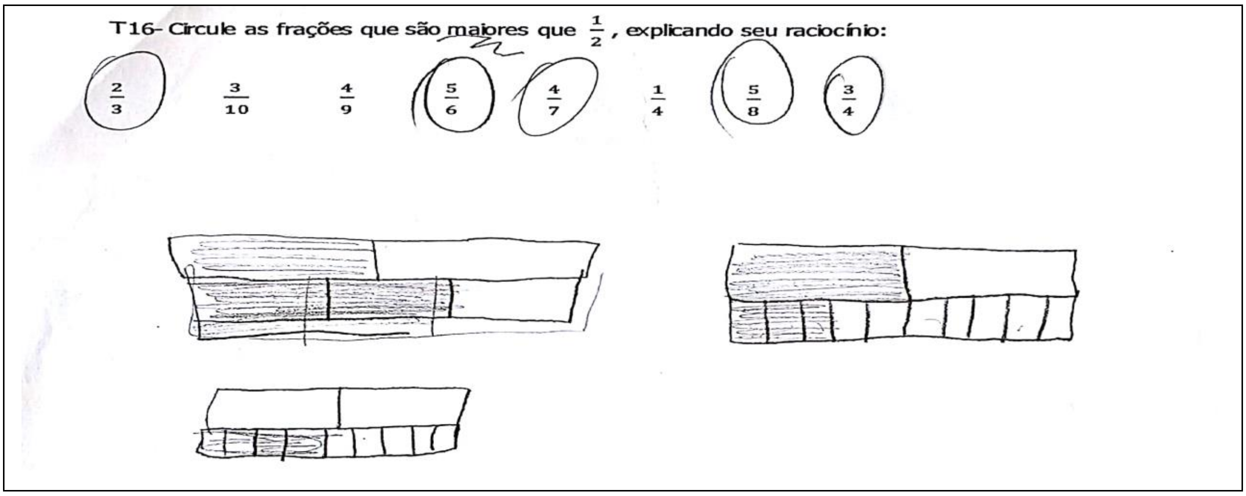


Figura 45 – T16 – grupo J – resposta correta – modelo de barras

O grupo B (Figura 46) assinalou acertadamente todas as frações maiores que $\frac{1}{2}$, porém, apresentou uma justificação que inicialmente se demonstrou um pouco falha se entendida *ipsis litteris*, suscitando dúvida ao referir que basta que o numerador de uma fração seja maior que a "sua metade" (metade de quem ? do próprio numerador ?) para que a fração seja maior que $\frac{1}{2}$. O conflito entre a justificação equivocada e as frações assinaladas corretamente sugere que o grupo possa não ter se expressado da forma devida, não sabendo traduzir "em palavras" a estratégia que haviam utilizado. Para esclarecer essa dúvida, no momento da discussão coletiva a Professora pediu que os alunos explicassem a linha de raciocínio que usaram e, pelos argumentos dados pelo aluno que respondeu, ficou claro que haviam se expressado equivocadamente, pois, tinham o correto entendimento de que o numerador tinha que ser maior que a metade do denominador. Dessa forma, a resposta do grupo foi classificado na categoria C5.

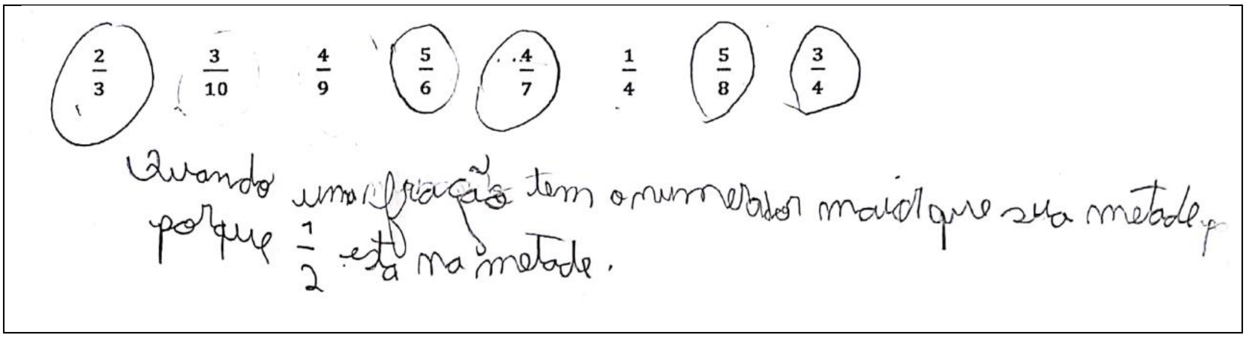


Figura 46 – T16 – grupo B – resposta correta

Dentre os grupos que apresentaram soluções erradas, cabe destacar o equívoco da estratégia apresentada pelo grupo A (C8), pois, a mesma parece apontar para uma ainda persistente influência dos procedimentos inerentes aos números naturais sobre os alunos, ao justificarem suas conclusões levando em consideração, erroneamente, os conceitos de divisores de um número tomando por base os algarismos que compõem a fração $\frac{1}{2}$, além de analisarem os numeradores e denominadores das frações indicadas de forma isolada, sem atribuir qualquer relação entre as partes e sem perceberem que cada fração corresponde a um único número, com sua própria magnitude. Assim, apesar de assinalarem corretamente algumas frações, mais especificamente todas as que apresentam denominadores pares (divisíveis por 2), a estratégia revela-se sem fundamento (figura 47).

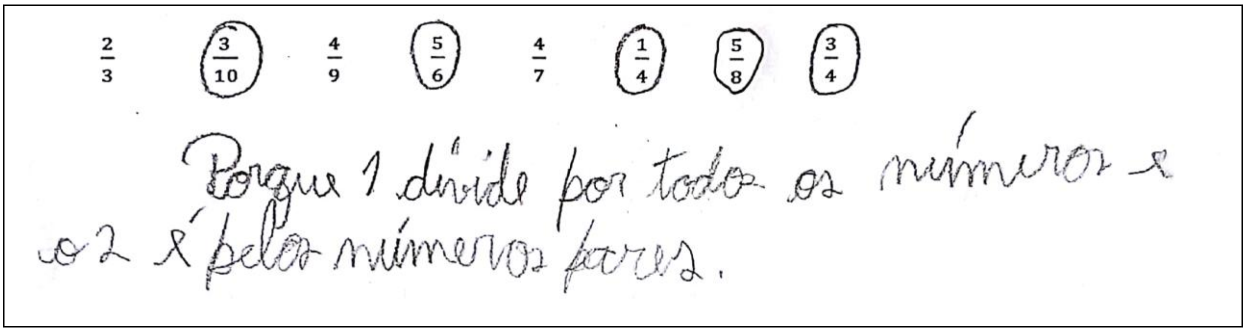


Figura 47 – T16 – grupo A – resposta incorreta

Em síntese, dos grupos que acertaram a tarefa, apenas um grupo optou por usar como estratégia a representação visual através das barras, reforçando a ideia de que os alunos sentem-se mais à vontade em apoiar suas linhas de raciocínio na representação simbólica através do uso de regras e procedimentos de cálculo, certamente influenciados pela abordagem didática que habitualmente vivenciam em sala de aula desde os anos escolares iniciais.

Dentre os grupos que apresentaram estratégias equivocadas, somente um cometeu erros que remetem à apropriação indevida do significado dos números racionais e à tentativa de transpor procedimentos característicos do conjunto dos números naturais aos números fracionários. As estratégias erradas dos demais grupos apontam para falta de atenção durante a realização da tarefa, não indicando, portanto, erros que se refiram à falta de compreensão do conteúdo em questão.

5.7 – Tarefa 17 – Adição de frações por estimação

Esta tarefa apresenta duas questões, subdivididas em duas alíneas cada uma, envolvendo adição de frações com denominadores diferentes e os alunos deveriam solucioná-las através da comparação com valores de referência, indicando se os resultados seriam maiores ou menores que $\frac{1}{2}$ (na alínea a) e maiores ou menores que 1 (na alínea b).

Quadro 24 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 17 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
1-a	O5	O3	O14	O3	O9
1-b	O6	O3	O14	O3	O9
2-a	O6	O3	O14	O3	O9
2-b	O6	O3	O14	O3	O9

Quadro 25 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 17 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
1-a	O3	O9	O4	O6	O9
1-b	O3	O9	O4	O6	O9
2-a	O3	O9	O3	O6	O9
2-b	O3	O9	O3	O6	O9

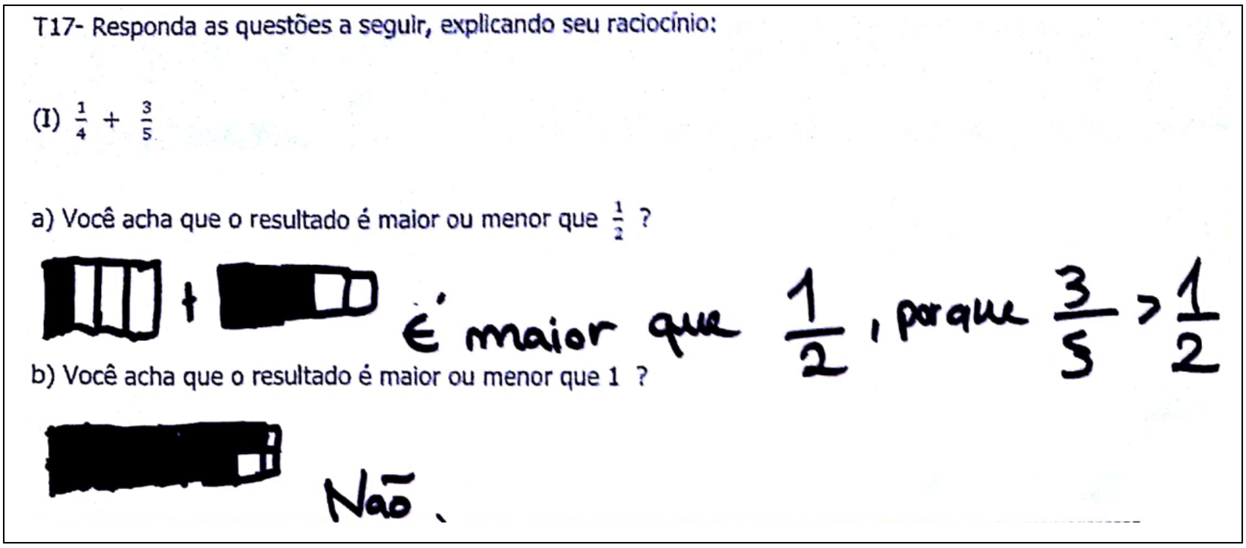
Quadro 26 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 17

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O3 – Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c **O5** – Adicionar ou Subtrair Frações por estimação, considerando os valores de referência $\frac{1}{2}$ e 1 **O6** – Representar a adição ou a subtração de frações através do Modelo de Barras	**O9** – Adicionar ou subtrair os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números naturais $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm b}\right)$ **O14** – Representar incorretamente a adição ou a subtração de frações no Modelo de Barras

Do total de grupos, 60% responderam corretamente às questões propostas, dos quais apenas 10% utilizaram como estratégia de solução a capacidade de estimativa para comparar as adições das frações originais com os valores de referência informados, o que configurava o objetivo da tarefa. Os 50% restantes fizeram uso do algoritmo do m.m.c. para encontrar primeiramente frações homogêneas para, em seguida, adicioná-las e só então comparar com os valores referenciais.

Na questão 1-a, o grupo A começa por fazer uso do modelo de barras para solucioná-la, porém, não dá continuidade a essa linha de raciocínio, passando, em seguida, a utilizar como estratégia o processo de estimação, baseando seu raciocínio na comparação da fração $\frac{3}{5}$ com o valor de referência $\frac{1}{2}$ (estratégia – categoria O5). Ao constatar que $\frac{3}{5}$ é maior que $\frac{1}{2}$, conclui, por conseguinte, que o resultado da adição indicada na questão também será maior que $\frac{1}{2}$ (Figura 48).

Na questão 1-b, pela justificação apresentada conclui-se que o grupo determinou as frações equivalentes para efetuar a adição proposta $\left(\frac{5}{20}+\frac{12}{20}=\frac{17}{20}\right)$, optando por apresentar sua linha de raciocínio através do modelo de barras, dividindo a barra em 20 partes e pintando 17 dessas partes, concluindo que o resultado é menor que 1, evidenciando o uso da estratégia – categoria O6 (Figura 48).


T17- Responda as questões a seguir, explicando seu raciocínio:

(I) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

a) Você acha que o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

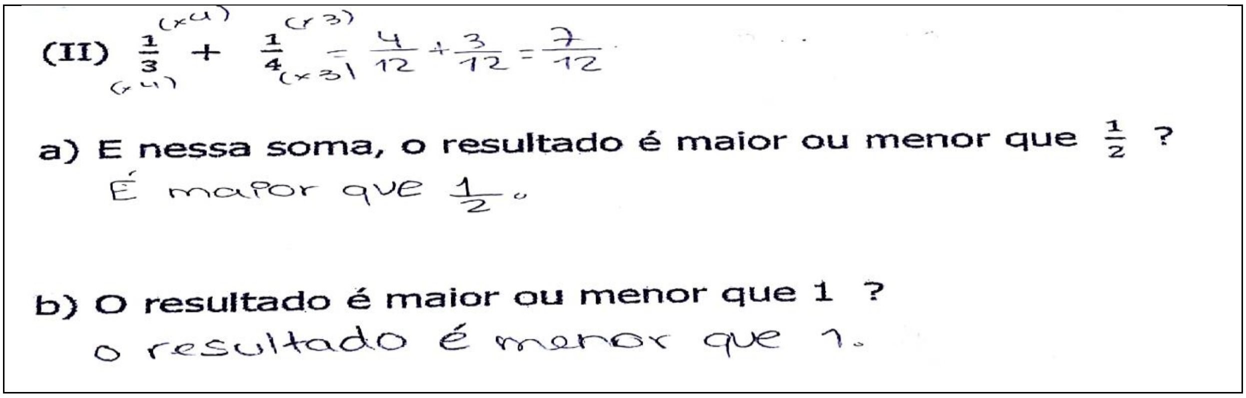
+ É maior que $\frac{1}{2}$, porque $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

b) Você acha que o resultado é maior ou menor que 1 ?

Não.

Figura 48 – Tarefa 17 – resolução do grupo A – questões 1-a e 1-b

O Grupo F optou por solucionar a tarefa utilizando a estratégia O3, encontrando as frações equivalentes e obtendo $\frac{7}{12}$ como resultado, e concluindo, consequentemente, que: (i) na questão 2-a o resultado é maior que $\frac{1}{2}$, e (ii) na questão 2-b o resultado é menor que 1 (Figura 49), porém, sem explicar como chegaram a essas conclusões. Como essa foi uma tarefa que veio logo em seguida a outra que também solicitava que fossem feitas comparações com valores de referência, pode ser levantada a hipótese de que os alunos tenham feito uso das mesmas estratégias de comparação utilizadas na tarefa 16.


(II) $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{4}$ = $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

a) E nessa soma, o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

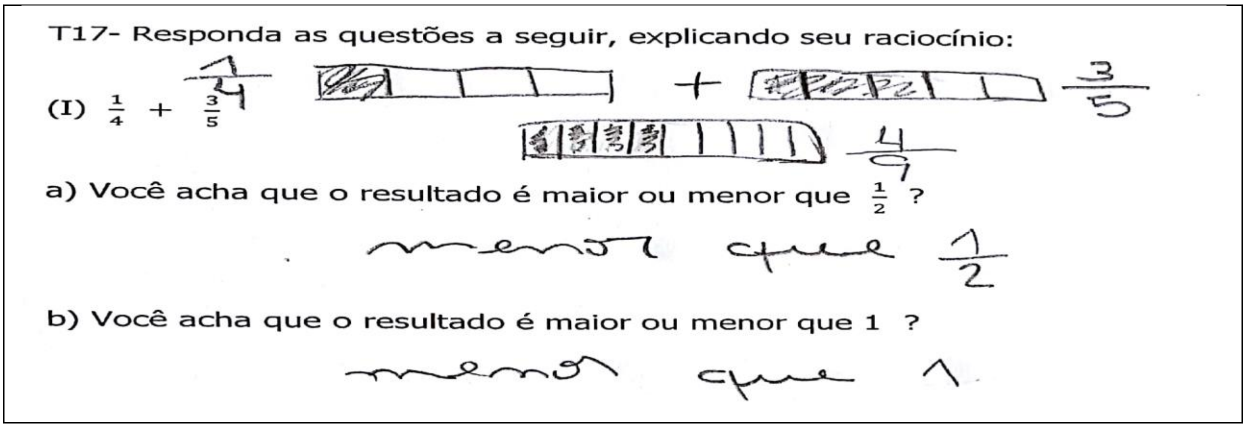
É maior que $\frac{1}{2}$.

b) O resultado é maior ou menor que 1 ?

o resultado é menor que 1.

Figura 49 – Tarefa 17 – resolução do grupo F – questões 2-a e 2-b

O Grupo C representou sua solução no modelo de barras, porém, utilizando uma estratégia incorreta (O14), uma vez que adicionaram diretamente os numeradores e os denominadores das frações originais $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=\frac{4}{9}\right)$, sem calcular as frações equivalentes necessárias para a operação. Dessa forma, representaram uma barra dividida em 9 partes e sombrearam 4 dessas partes (Figura 50).


T17- Responda as questões a seguir, explicando seu raciocínio:

(I) $\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{5}$

$\frac{4}{9}$

a) Você acha que o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

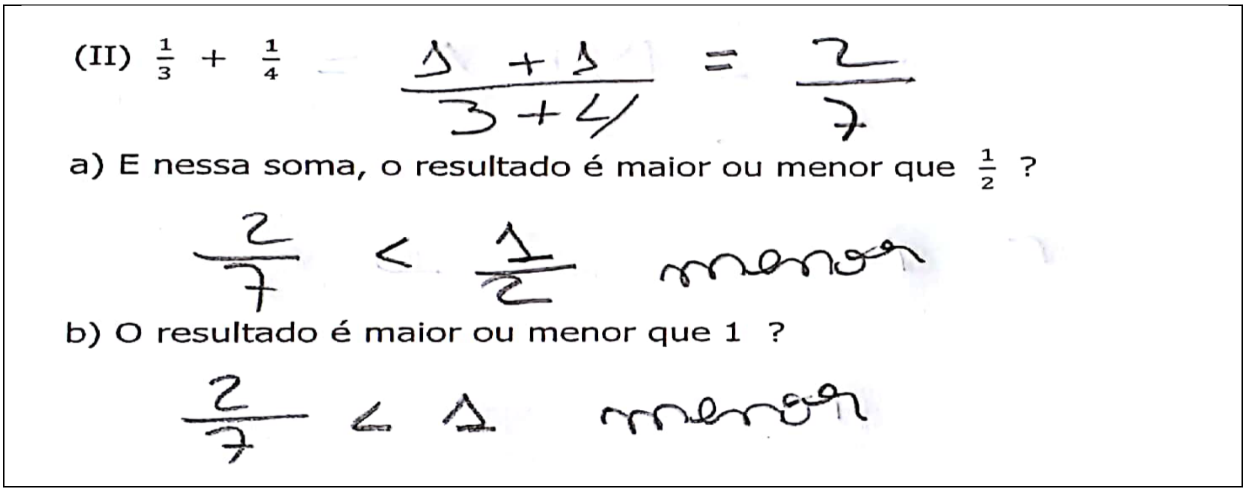
menor que $\frac{1}{2}$

b) Você acha que o resultado é maior ou menor que 1 ?

menor que 1.

Figura 50 – Tarefa 17 – resolução do grupo C – questões 1-a e 1-b

O grupo G utilizou a representação simbólica para solucionar a questão, porém, de forma incorreta, uma vez que somou diretamente os numeradores e denominadores, $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2}{7}\right)$, de forma semelhante ao erro cometido pelo grupo C, não se atentando para a necessidade de calcular as frações equivalentes necessárias para esse tipo de operação (estratégia O9), levando-os a concluir que o resultado da adição seria menor tanto se comparado a $\frac{1}{2}$ quanto a 1 (Figura 51).


(II) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ $\frac{1+1}{3+4}=\frac{2}{7}$

a) E nessa soma, o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

$\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ menor

b) O resultado é maior ou menor que 1 ?

$\frac{2}{7} < 1$ menor

Figura 51 – Tarefa 17 – resolução do grupo G – questões 2-a e 2-b

Em síntese, dos seis grupos que acertaram as questões propostas, apenas um grupo respondeu, ainda que parcialmente, de acordo com o que a tarefa se propunha a avaliar: a capacidade de estimativa dos alunos ao comparar as frações dadas com valores de referências. O fato da maioria dos grupos ter respondido utilizando o algoritmo do m.m.c., ainda que não invalide a tarefa, nos faz concluir que o objetivo da mesma não foi atingido.

No momento da discussão com a turma, a Professora Lorena fez questão de salientar que, embora não estivesse dito claramente no enunciado da tarefa, a mesma deveria ser solucionada tomando por base a estimativa (foi utilizado o comando “você acha”), sem a necessidade de que fossem efetuados cálculos, pois, o que se pretendia era um valor aproximado, não um valor exato.

5.8 – Tarefa 18 – Adição e subtração de frações

Esta tarefa é composta de cinco questões e refere-se a um terreno cuja área está dividida em seis partes iguais, das quais três partes estão ocupadas pela casa, duas partes pelo quintal e uma pelo jardim. A primeira questão pede aos alunos que representem as frações correspondentes à cada subdivisão do terreno, enquanto que as demais questões abordam a soma e a subtração de frações através de combinações e separações entre as partes.

No momento da análise das respostas, chamou à atenção as soluções dadas pelos alunos para os resultados das questões (d) e (e), relacionadas à subtração de frações, pois, cinco dos dez grupos apresentaram soluções idênticas e com uma lógica completamente diferente do que se esperava. Um olhar mais atento ao enunciado dessas questões, permitiu perceber que o mesmo pode conduzir a dois tipos de interpretações distintas, dependendo do ponto de vista de quem o lê. Ambas as questões perguntam que fração do terreno "sobra" quando o jardim é "retirado" (na questão d), e quando o quintal é "retirado" (na questão e). Ao incluir essas questões na tarefa, minha intenção era claramente promover estratégias de subtração de frações com o mesmo denominador, sendo os verbos "retirar" e "sobrar" claramente alusivos à essa operação de cálculo.

No entanto, apenas um grupo seguiu esta linha de raciocínio, subtraindo do todo a quantidade correspondente a cada subdivisão do terreno a que se referiam às questões. Cinco grupos entenderam que ao "retirarem" qualquer das partes do terreno estariam "reconfigurando" o mesmo, uma vez que seria impossível subtrair parte(s) de um terreno, mantendo-o do tamanho original (ou seja, preservando a unidade original), pois, o que está sendo retirado está sendo efetivamente eliminado, provocando, obrigatoriamente, um redimensionamento da área e, portanto, dando origem a uma nova unidade. Em virtude desse fato, ao categorizar as estratégias utilizadas pelos alunos nessa tarefa, considerei ambas corretas, uma vez que as duas linhas de interpretação apresentam coerência e pertinência.

Quadro 27 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 18 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
(a.1)	O7	O7	O7	O7	O7
(a.2)	O7	O7	O7	O15	O7
(a.3)	O7	O7	O7	O15	O7
(b)	O1	O1	O1	O1	O1
(c)	O1	O1	O1	O1	O1
(d)	O2	O2	O2	O15	O15
(e)	O2	O2	O2	O15	O15

Quadro 28 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 18 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
(a.1)	O7	O7	O7	O7	O7
(a.2)	O7	O15	O7	O7	O7
(a.3)	O7	O15	O7	O7	O7
(b)	O1	O1	O1	O1	O1
(c)	O1	O1	O1	O1	O1
(d)	O2	O2	O15	O15	O1
(e)	O2	O2	O15	O15	O1

Quadro 29 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 17

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O1 – Repetir o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\right)$ **O2** – Repetir o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\right)$, após reconfigurar a unidade – Tarefa 18 **O7** – Representar corretamente as frações – Questão 18	**O15** – Outras

A questão (a) continha três perguntas sobre as representações simbólicas das frações correspondentes à casa, ao jardim e ao quintal. Com exceção dos grupos D e G que por falta de atenção representaram somente uma das frações, todos os demais responderam corretamente (Figura 52).

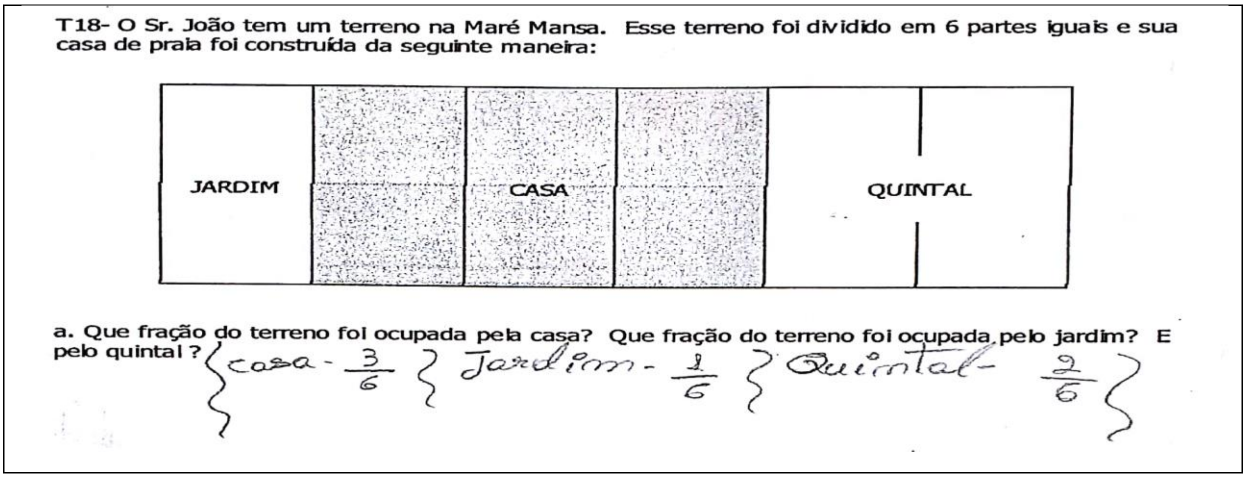


Figura 52 – T18 – grupo F – respostas corretas (a)

As questões (b) e (c) que tratavam de combinação de partes do terreno também foram respondidas corretamente pela unanimidade dos grupos (Figura 53).

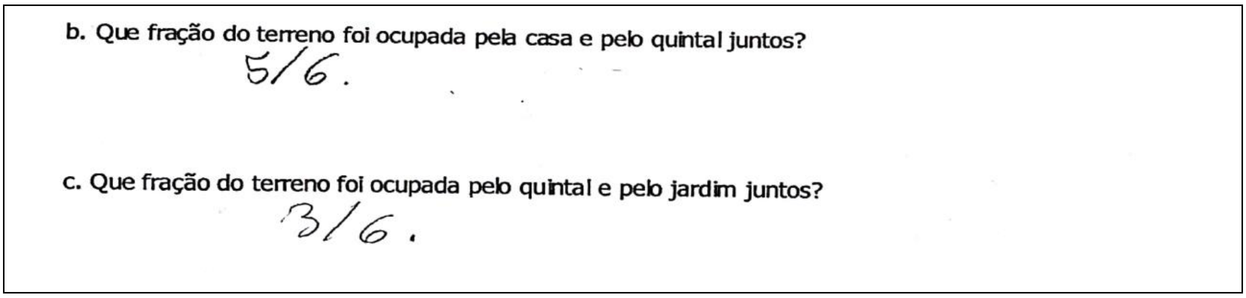
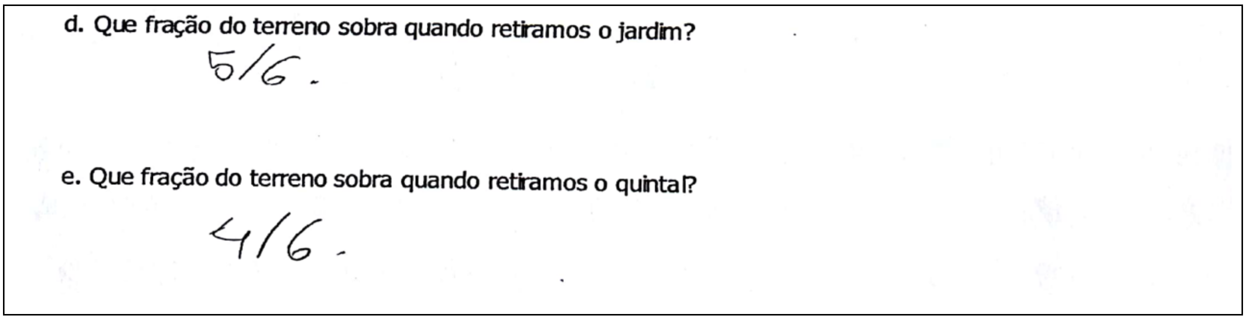


Figura 53 – T18 – grupo J – respostas corretas (b/c)

Quanto às questões (d) e (e), as respostas dadas pelos alunos divergiram em função da linha de interpretação do enunciado seguida por cada grupo: (i) apenas um grupo (J) respondeu subtraindo das seis partes do terreno aquela(s) a que se referia(m) as questões (Figura 54); (ii) cinco grupos (A, B, C, F e G) entenderam que ao “retirar” parte(s) do terreno estariam suprimindo-a(s) de fato, logo o terreno passaria a ter uma outra configuração e, portanto, uma nova medida (unidade) (Figura 55); e, (iii) quatro grupos (D, E, H e I) consideraram que ao retirarem a(s) parte(s) indicadas nas questões, deveriam considerar apenas o valor removido. Essas respostas foram consideradas incorretas e classificadas na categoria O15, que envolve falta de atenção, dificuldade de raciocínio, etc., uma vez que o enunciado das questões deixa claro que o que se quer saber é “que fração do terreno sobra quando retiramos...?”, ou seja, está claramente se referindo ao terreno original (Figura 56).

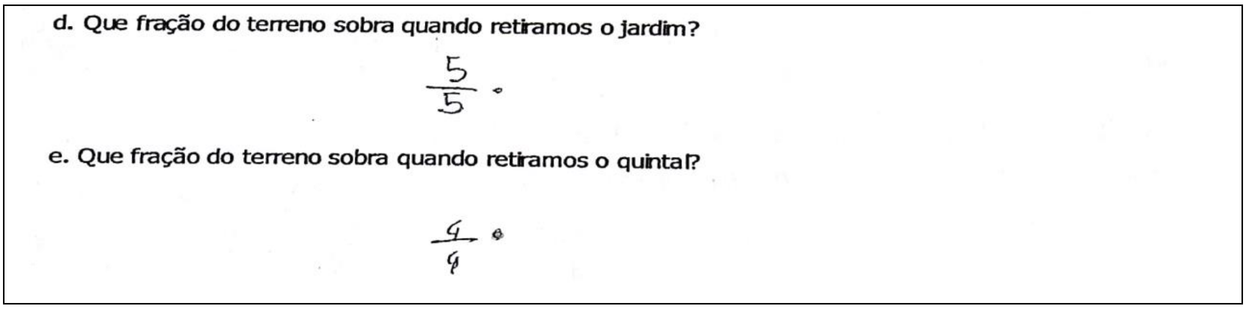

d. Que fração do terreno sobra quando retiramos o jardim?

5/6.

e. Que fração do terreno sobra quando retiramos o quintal?

4/6.

Figura 54 – T18 – grupo J – resposta correta (d/e)

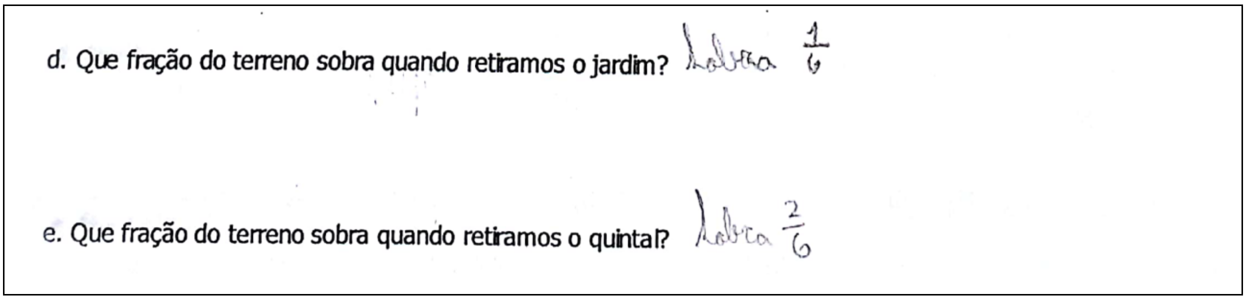

d. Que fração do terreno sobra quando retiramos o jardim?

$\frac{5}{5}$.

e. Que fração do terreno sobra quando retiramos o quintal?

$\frac{4}{4}$.

Figura 55 – T18 – grupo F – resposta correta (d/e)


d. Que fração do terreno sobra quando retiramos o jardim? sobra $\frac{1}{6}$

e. Que fração do terreno sobra quando retiramos o quintal? sobra $\frac{2}{6}$

Figura 56 – T18 – grupo D – resposta incorreta (d/e)

Em síntese, tendo em vista as linhas de raciocínio aplicadas pelos alunos face aos enunciados das questões (d) e (e), seis grupos apresentaram dois tipos de respostas diferentes, porém, ambas consideradas corretas. Os quatro grupos restantes demonstraram falha no entendimento da unidade (o terreno) a que se referiam as questões. Quanto às questões (a), (b) e (c), não houve qualquer problema ou dificuldade em suas soluções.

Porém, mais do que a análise dos acertos e erros dos alunos, esta tarefa fez emergir uma problemática que por vezes ajuda a aprofundar as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem da Matemática: a clareza dos enunciados das questões.

Ao elaborar o enunciado de uma tarefa, o professor precisa estar atento para que as formulações sejam apresentadas de formas claras e precisas, com todas as informações necessárias para que os alunos não tenham dúvidas sobre o que está sendo solicitado. Informações em falta ou em excesso ou que provoquem interpretações dúbias, podem dificultar a compreensão do problema e conduzir a uma resposta errada ou, até mesmo, a uma questão sem resposta. Cabe ao professor antecipar as possíveis leituras diferentes daquela à que se pretende com a tarefa, não dando margem à linhas de interpretações por parte dos alunos em não conformidade com a que se propõe avaliar.

Pela sua configuração, a tarefa 18 não previa a utilização do Modelo Linear de Barras para sua resolução.

5.9 – Tarefa 21 – Adição e subtração de frações

Esta tarefa é constituída por quatro questões em que cada uma apresenta a adição de duas frações com denominadores diferentes com duas barras pré-desenhadas e sombreadas de acordo com as frações originais e uma terceira barra vazia na qual deve ser representado o resultado do somatório total entre as frações.

Quadro 30 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 21 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
A	O3	O3	O3	O3	O3
B	O3	O3	O3	O3	O15
C	O15	O3	O3	O3	O3
D	O3	O3	O3	O3	O11

Quadro 31 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 21 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
A	O9	O9	O9	O9	O9
B	O9	O9	O9	O9	O9
C	O9	O9	O9	O9	O9
D	O12	O9	O9	O9	O10

Quadro 32 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 21

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O3 – Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c	**O9** – Adicionar ou subtrair os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números naturais $\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b\pm b}\right)$ **O10 –** Calcular o denominador comum corretamente, porém, sem fazer a correspondência devida nos numeradores, adicionando ou subtraindo os numeradores originais, p.e. $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}\right)$ **O11 –** Calcular o denominador comum corretamente, porém, usando o novo denominador para fazer a correspondência nos numeradores, sem considerar o fator de multiplicação correto, por exemplo: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=\frac{12+24}{12}=\frac{36}{12}\right)$ **O12 –** Calcular as frações equivalentes corretamente, porém, subtraindo os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números inteiros, p.e. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{15}{20}-\frac{4}{20}=\frac{11}{0}\right)$ **O15 –** Outras

Das respostas dadas pelos alunos, 42,5% foram corretas, todas utilizando as estratégias categorizadas como O3 e O6 simultaneamente, através da determinação das frações equivalentes e pela representação nas barras vazias dos resultados das adições propostas. Em relação às respostas erradas, 45% foram classificadas na categoria O9, por terem adicionado os numeradores e denominadores originais, sem calcular previamente as frações homogêneas; 7,5% revelaram falha em parte dos procedimentos de cálculos, dos quais 2,5% na categoria O10, 2,5% na categoria O11 e 2,5% na categoria O12; os restantes 5% das respostas indevidas foram classificados na categoria O15 por apresentarem erros ligados à falta de atenção no momento de realização da questão.

Como o enunciado da tarefa solicitava que fossem utilizadas as barras para a solução das questões, todos os grupos que responderam corretamente fizeram uso simultaneamente das barras e dos procedimentos de cálculo para determinarem as frações homogêneas, através da decomposição simultânea dos denominadores originais, possibilitando a adição entre as parcelas. Cabe ressaltar que no Brasil é comum que seja calculado o m.m.c. entre denominadores de frações heterogêneas pelo processo de decomposição simultânea para adicioná-las ou subtraí-las, qualquer que seja a quantidade de frações envolvidas na operação (figura 57 e 58).

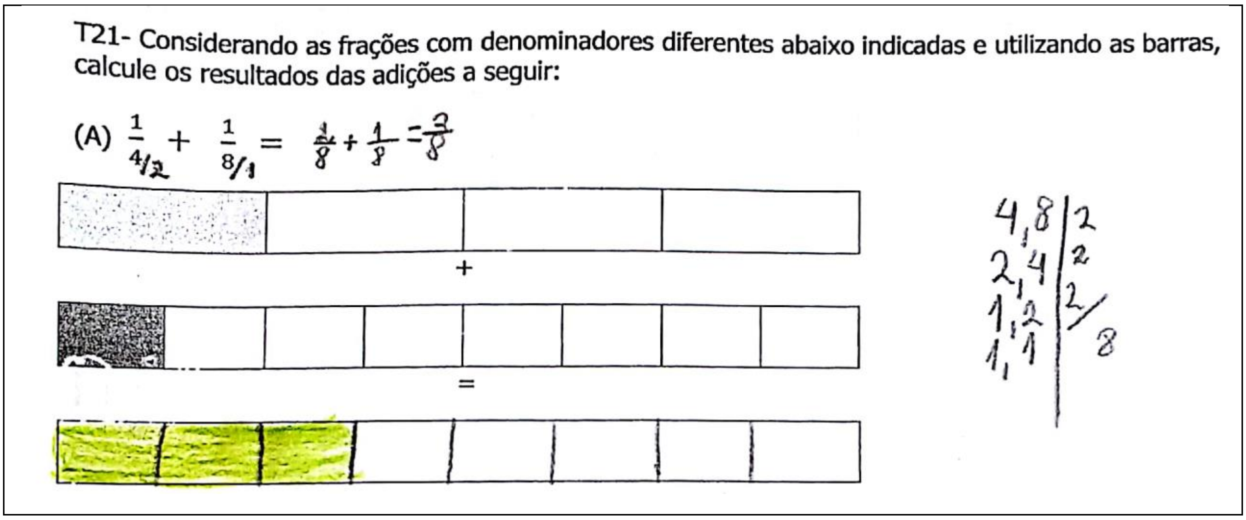


Figura 57 – T21 – questão: A – grupo A – resposta correta

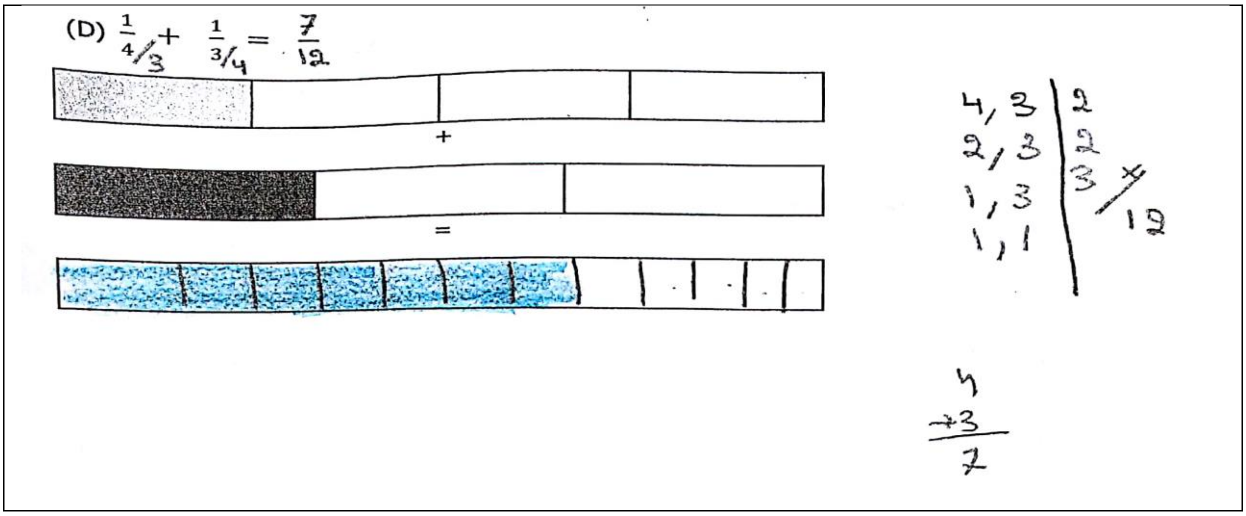


Figura 58 – T21 – questão: D – grupo D – resposta correta

Dentre as estratégias erradas apresentadas pelos grupos, a maioria refere-se à transposição indevida de procedimentos de cálculo inerentes aos números naturais para os números racionais, ao adicionarem diretamente os numeradores e denominadores entre si, classificadas na categoria O9 no presente estudo. É importante observar que mesmo com o auxílio da representação visual, que de forma simples e direta possibilita a percepção de que a resposta encontrada estava incorreta, uma vez que a parte sombreada na barra correspondente ao somatório total das frações era menor do que as partes sombreadas nas barras correspondentes às frações originais, os grupos que cometeram esse tipo de erro, parecem não haver alcançado esse entendimento (figuras 59 e 60).

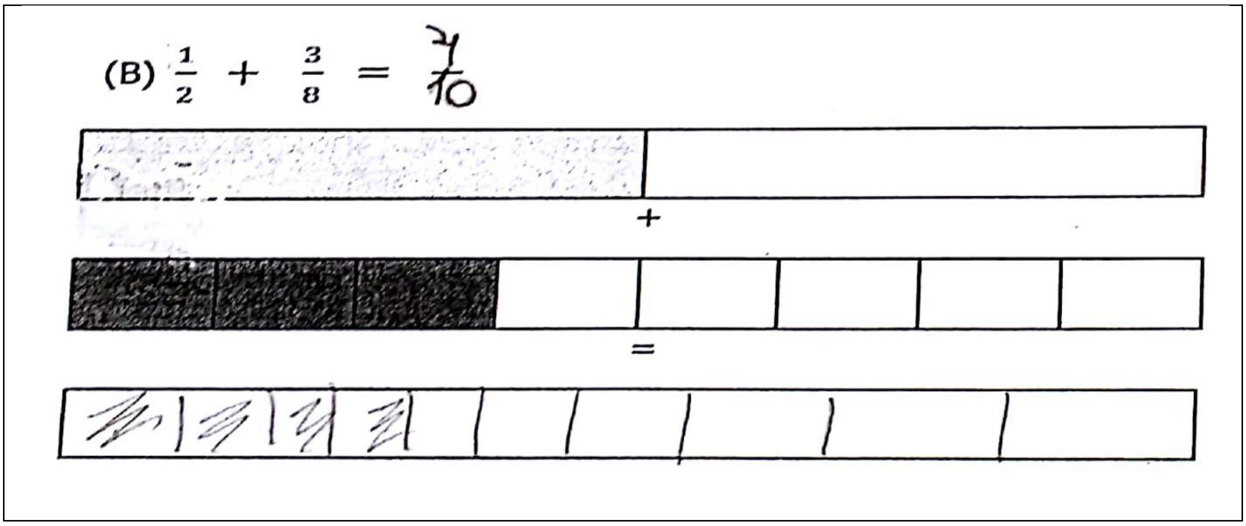


Figura 59 – T21 – questão: B – grupo G – resposta incorreta

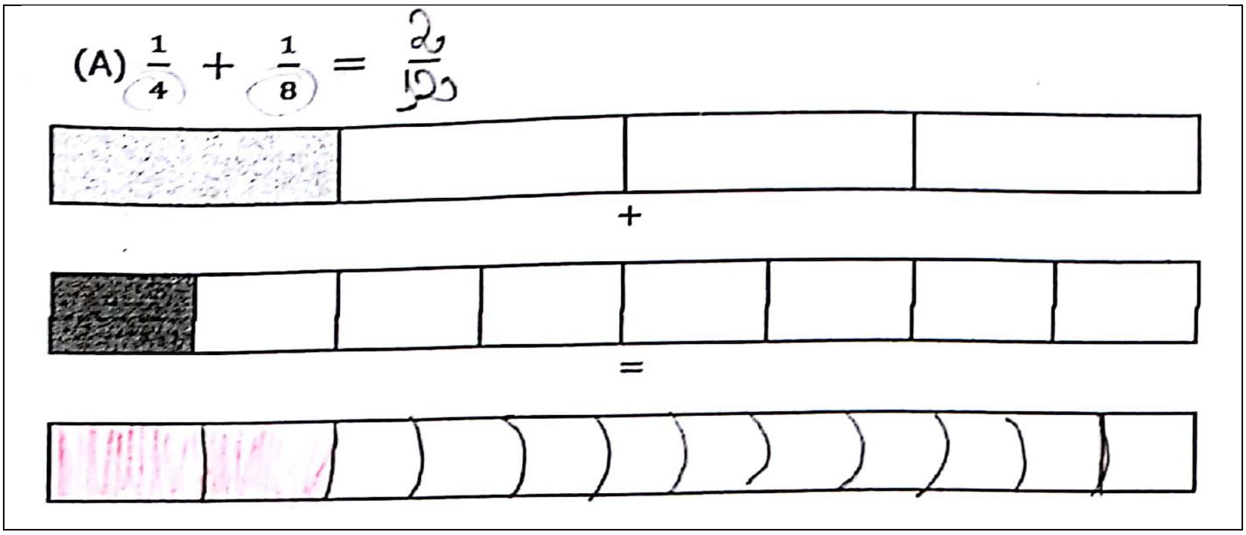


Figura 60 – T21 – questão: A – grupo I – resposta incorreta

Por sua vez, o grupo J apresenta um erro também considerado muito comum quando os alunos estão tendo os contactos iniciais com as operações de adição e subtração de frações: apesar de terem calculado corretamente o novo denominador, não multiplicaram os numeradores pelos fatores de multiplicação devidos, embora os tenham indicado junto às frações, adicionando incorretamente os numeradores originais (categoria O10). Mais uma vez, observa-se que o sombreamento das partes na terceira barra ficou muito aquém dos sombreamentos das barras anteriores, uma vez que foi dividida em muito mais partes que os denominadores originais. Porém, ao que tudo indica, esse fato não foi objeto da atenção dos alunos, pois, nada em suas respostas nos remete a uma tentativa de correção do resultado encontrado ou, ao menos, aponta para uma dúvida, um questionamento com a resposta obtida através da representação visual (figura 61)

No momento da discussão coletiva com a turma, a professora Lorena chamou a atenção para esse pormenor, questionando os grupos que haviam cometido tanto esse erro (categoria O10) como o da adição direta dos numeradores e denominadores originais (categoria O9), sobre se lhes parecia realmente possível que o somatório de uma adição pudesse apresentar como resultado um valor menor que as parcelas envolvidas na operação. Como nenhum aluno se manifestou para respondê-la, a professora pediu que eles "esquecessem" temporariamente as frações indicadas na questão e que observassem novamente e com maior atenção os sombreamentos feitos nas duas barras iniciais. Em seguida, retomou o questionamento feito anteriormente, perguntando se o sombreamento da terceira barra resultaria maior, menor ou igual após a soma dos dois sombreamentos originais, ao que todos os alunos responderam, sem exceção, que ficaria maior, já que "juntaria as duas partes de cima". A professora, então, voltou às frações e perguntou o que havia faltado fazer na questão e, uma aluna disse que havia percebido que eles teriam que ter calculado as frações equivalentes primeiro para depois calcularem a adição.

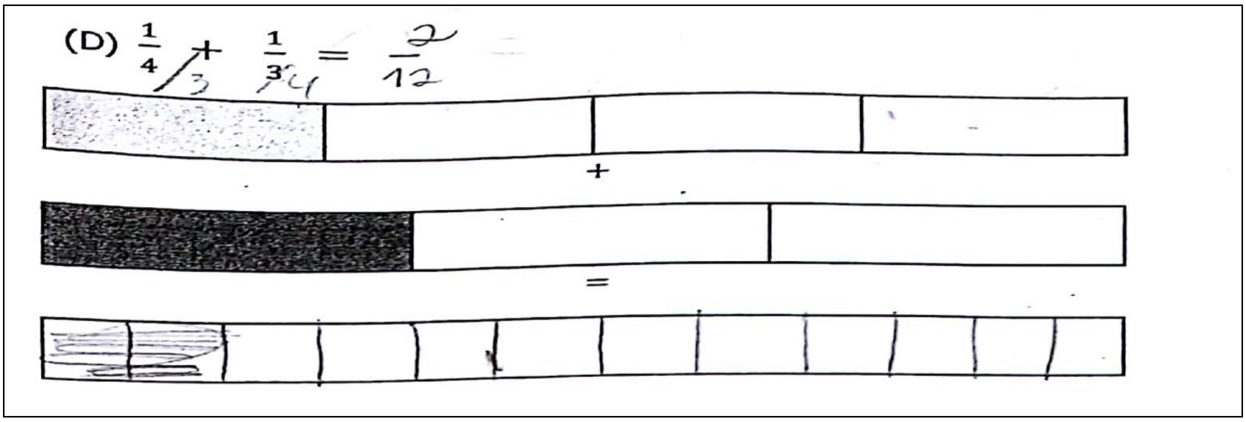


Figura 61 – T21 – questão: D – grupo J – resposta incorreta

Em síntese, esta tarefa foi a primeira apresentada aos alunos contendo questões de adição de frações apenas com denominadores diferentes, múltiplos ou primos entre si. Pelos erros cometidos, é possível constatar a forte influência que os procedimentos de cálculo pertinentes aos números naturais ainda exercem sobre uma considerável parcela de alunos, uma vez que a maior parte dos erros refere-se às somas diretas entre numeradores e denominadores, manipulando-os como números independentes, sem a determinação das frações equivalentes necessárias.

Nesse caso, o modelo linear de barras poderia servir como um poderoso auxiliar para os alunos ao desenvolverem e analisarem suas estratégias, por permitir que percebessem seus erros de forma fácil e direta, ao observarem que as partes sombreadas das barras onde estavam representados os resultados das adições haviam ficado menores que as barras originais. Porém, tal hipótese não se concretizou, uma vez que os alunos preferiram apoiar-se mais nos resultados decorrentes dos procedimentos de cálculo indevidos que haviam utilizado do que na representação visual solicitada pela tarefa.

Observamos que, curiosamente, a quase totalidade dos erros ocorreu na turma 502, cujos grupos de alunos não acertaram qualquer questão proposta pela tarefa. Tal situação causou estranheza tanto na professora Lorena quanto em mim, uma vez que até aquele momento nenhuma discrepância maior havia sido apresentada entre as turmas, que haviam encontrado resultados similares nas tarefas trabalhadas anteriormente. Como não havia qualquer indicador que norteasse nossa investigação na busca de uma explicação para a ocorrência desse fato, decidimos aguardar a resolução da tarefa seguinte (tarefa 22), que tratava do mesmo assunto, apresentando três questões envolvendo adições de duas frações com denominadores diferentes, múltiplos ou primos entre si, sem recorrer formalmente a utilização das barras. Com base nos resultados encontrados, caso persistisse uma considerável diferença entre as turmas, a Unidade de Ensino seria repensada e retrabalhada por mim a partir desse ponto, de forma a atender a essa nova demanda. No entanto, os resultados encontrados retomaram o curso habitual, com percentuais de erros e acertos semelhantes entre as turmas: grupos da turma A – acertos, 80% e erros,20%; grupos da turma B – acertos, 80%, erros, 6,7% e não responderam, 13,3%.

5.10 – Tarefa 23 – Adição e subtração de frações

Esta tarefa é constituída por cinco questões sobre subtração de frações, das quais as duas primeiras envolvem frações com o mesmo denominador e as três últimas frações com denominadores diferentes, múltiplos ou primos entre si. Cada questão apresenta três barras pré-desenhadas, estando as duas primeiras já repartidas e sombreadas com as representações das frações indicadas na subtração e a terceira barra vazia, para que os alunos possam representar o resultado final da operação.

Quadro 33 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 23 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
A	O1	O1	O1	O1	O1
B	O1	O1	O1	O1	O1
C	O3	O10	O10	O3	O3
D	O3	O10	O10	O3	O3
E	O3	O10	O10	O3	O3

Quadro 34 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 23 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
A	O1	O1	O1	O1	O1
B	O1	O1	O1	O1	O1
C	NS*	O10	O15	O3	O12
D	NS	O10	O3	O3	O12
E	NS	O10	O3	O3	NS

* NS – não solucionou a questão

Quadro 35 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 23

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O1 – Repetir o denominador, adicionando ou subtraindo os numeradores $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\right)$ **O3** – Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c	**O10 –** Calcular o denominador comum corretamente, porém, sem fazer a correspondência devida nos numeradores, adicionando ou subtraindo os numeradores originais, p.e. $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}\right)$ **O12 –** Calcular as frações equivalentes corretamente, porém, subtraindo os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números inteiros, p.e. $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{0}\right)$ **O15 –** Outras

Do total de questões trabalhadas nessa tarefa, 68% foram respondidas corretamente. Quanto às questões que apresentaram estratégias erradas em suas resoluções, 18% subtraíram os numeradores das frações originais entre si, apesar de terem calculado corretamente o denominador comum (estratégia O10), enquanto 4%, apesar de terem determinado corretamente as frações equivalentes, subtraíram, em seguida, os numeradores e denominadores, encontrando resultados com denominadores zerados (O12), e 2% apresentaram falta de atenção no momento da resolução de apenas uma das cinco questões (O15), caso do grupo H que respondeu corretamente quatro das cinco questões. Os 8% restantes correspondem a questões que não foram solucionadas (NS).

As questões (A) e (B) que apresentavam subtrações de frações homogêneas foram solucionadas corretamente pela unanimidade dos grupos (figuras 62 e 63).

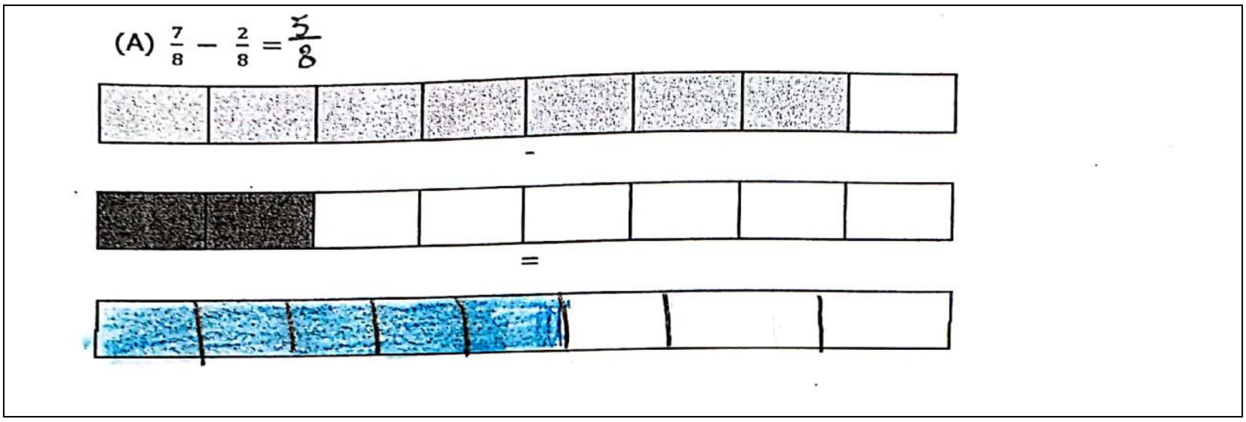


Figura 62 – T23 – questão (A) – grupo D – resposta correta

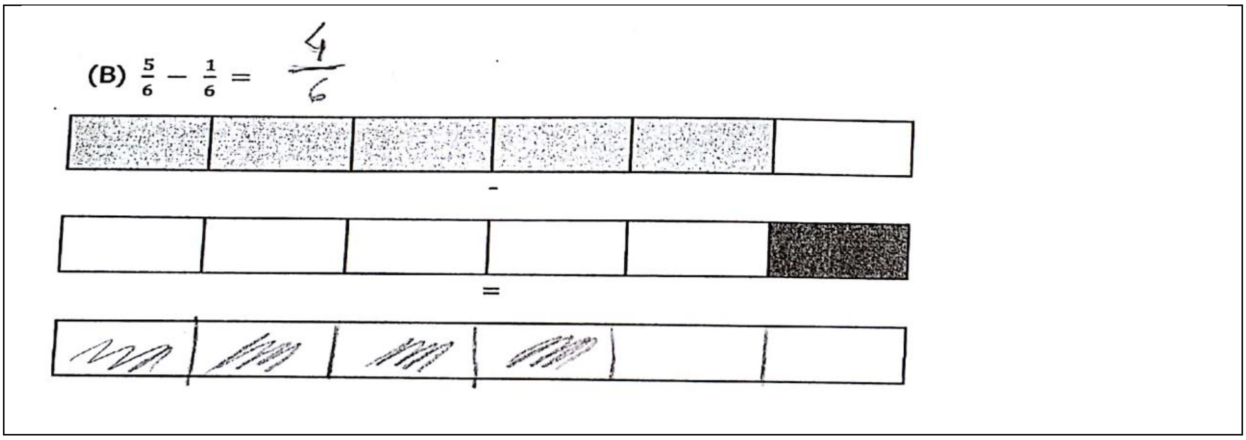


Figura 63 – T23 – questão (B) – grupo E – resposta correta

O grupo B, apesar de ter calculado corretamente os denominadores comuns nas questões (C), (D) e (E) através do processo de decomposição simultânea, não determinou devidamente as frações equivalentes, uma vez que não fez a correspondência devida nos numeradores das frações, subtraindo os numeradores originais – categoria O10 (figura 64). Erros semelhantes foram cometidos pelos grupos C e G nas mesmas questões.

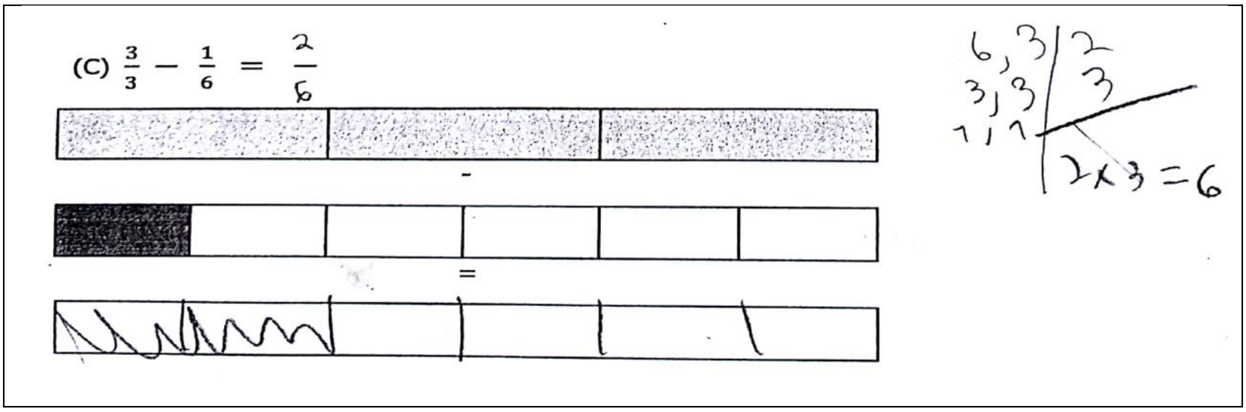


Figura 64 – T23 – questão (C) – grupo B – resposta incorreta

O grupo J começa por resolver a questão (C) de forma correta, calculando o novo denominador pelo método da decomposição simultânea e determinando as frações equivalentes. Em seguida, porém, ao efetuar a subtração entre as frações equivalentes, manipula tanto os numeradores como os denominadores, subtraindo-os entre si, encontrando, portanto, uma fração resultante com denominador zero. Em relação à barra pré-desenhada na qual o grupo deveria representar o resultado da operação, esta foi deixada vazia (figura 65). O grupo repetiu a mesma estratégia errada na questão seguinte (D).

No momento da discussão coletiva, a professora Lorena questionou os alunos do grupo sobre o resultado encontrado, se achavam que era possível uma fração com denominador zero e o porque de não terem feito qualquer representação na barra. Os alunos responderam que haviam achado estranho o resultado encontrado e que não tinham entendido como fariam a representação dessa fração na barra, pois, não tinham como dividi-la. A professora questionou se havia alguma diferença entre subtrair as frações equivalentes e as frações das questões (A) e (B). Nesse momento, o grupo percebeu o erro cometido, pois, bastava que repetissem o denominador comum encontrado e subtraíssem os numeradores e que, em seguida, poderiam fazer a representação visual.

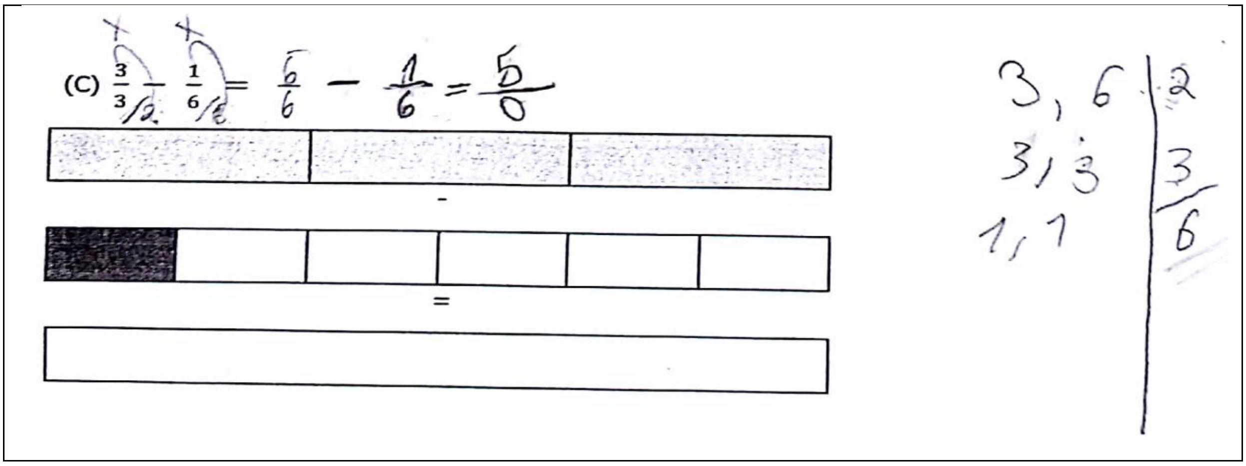


Figura 65 – T23 – questão (C) – grupo J – resposta incorreta

Em síntese, nesta tarefa os erros cometidos concentraram-se exclusivamente nas questões envolvendo subtrações de frações com denominadores diferentes, com as estratégias erradas divididas entre duas categorias: (i) O10 – na qual os grupos, apesar de terem calculado o denominador comum corretamente, não determinaram as frações equivalentes, subtraindo os numeradores originais das frações, e (ii) O12 – na qual o grupo, apesar de ter determinado corretamente as frações equivalentes, subtraiu os numeradores e os denominadores entre si, resultando em um fração com denominador zero.

Apesar de todas as questões apresentarem as barras com o objetivo de auxiliar os alunos em suas resoluções, oferecendo a eles uma estratégia de resolução alternativa, especialmente naquelas que contemplavam frações heterogêneas, nota-se que as barras foram utilizadas apenas para representar visualmente os resultados encontrados na representação simbólica. Esta conclusão é respaldada pelo fato de que quando o grupo J encontrou frações com denominadores iguais a zero, deixou as barras correspondentes vazias, sem qualquer representação, por não terem como dividir as mesmas.

5.11 – Tarefa 25 – Adição e subtração de frações

Esta tarefa estava dividida em duas questões e apresentava a seguinte situação contextualizada: Marta já havia lido $\frac{3}{4}$ das páginas de um livro e, em seguida, leu mais $\frac{1}{5}$ do total de páginas. A primeira questão envolvia a adição das frações, ao solicitar que fosse calculada a fração que representava o total de páginas já lidas por Marta até aquele momento, e a segunda envolvia a subtração de frações, ao pedir que fosse calculada, em número fracionário, a quantidade de páginas restantes para Marta terminar de ler o livro.

Quadro 36 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 25 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501

Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
A	O3	O3	O3	O3	O3
B	O3	O3	O3	O3	O3

Quadro 37 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 25 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502

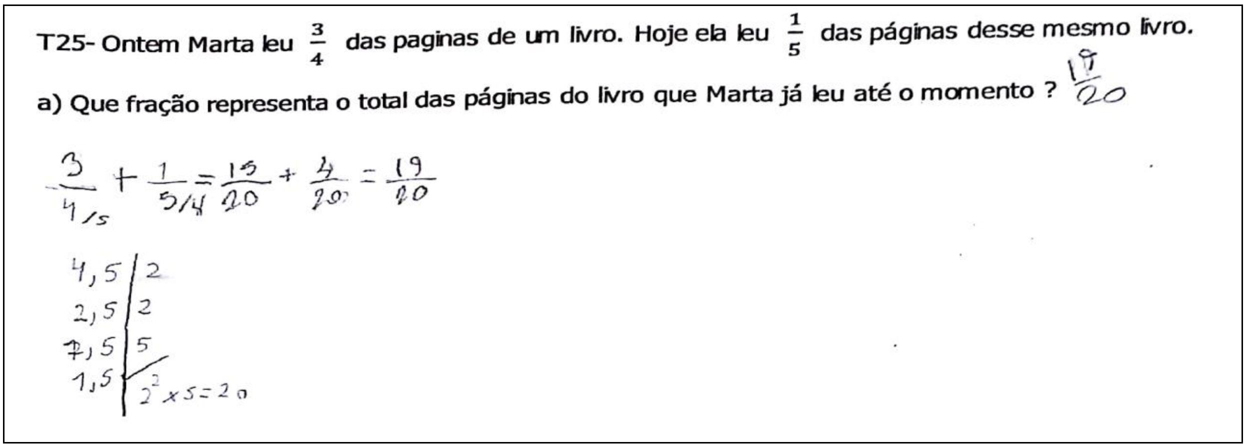
Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
A	NS	O3	O11	O3	O3
B	NS	O15	O11	O3	O3

Quadro 38 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 25

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O3 – Determinar as frações equivalentes efetuando, em seguida, a adição ou subtração das frações.	**O11** Calcular o denominador comum corretamente, porém, usando o novo denominador para fazer a correspondência nos numeradores, sem considerar o fator de multiplicação correto, p.e. $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}=\frac{12+24}{12}=\frac{36}{12}\right)$ **O15 –** Outras

Do total dos grupos, 70% acertaram integralmente a tarefa através da estratégia O3. Dos 30% restantes, (i) 10% responderam a primeira questão corretamente e a segunda de forma indevida, ao repetir o resultado encontrado na primeira questão, estratégia classificada na categoria O15 por indicar falta de atenção; (ii) 10% não solucionaram a tarefa (NS); (iii) e os 10% restantes, apesar de terem calculado o novo denominador acertadamente, não fizeram a correspondência correta nos denominadores, acarretando erro na operação de adição na letra (a) e, por conseguinte, erro na subtração solicitada na letra (b), uma vez que o resultado da segunda dependia do resultado encontrado na primeira questão.

Todos os grupos que solucionaram corretamente as questões desta tarefa utilizaram a mesma estratégia: na primeira questão, determinaram as frações equivalentes efetuando, em seguida, a adição necessária (figura 66).


T25- Ontem Marta leu $\frac{3}{4}$ das paginas de um livro. Hoje ela leu $\frac{1}{5}$ das páginas desse mesmo livro.

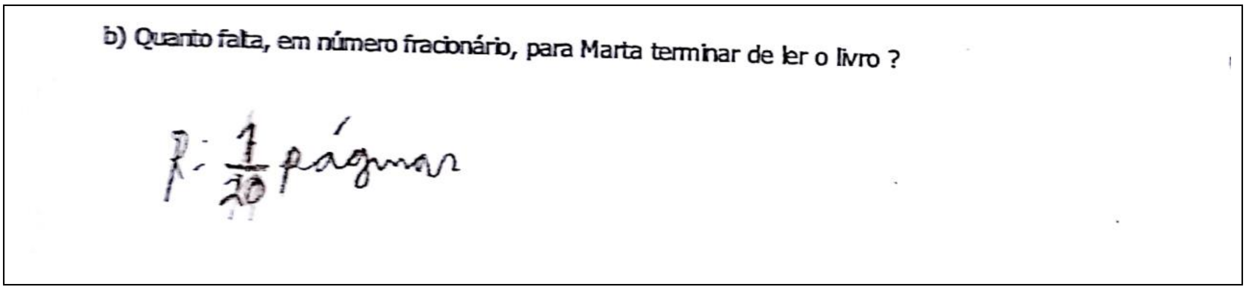
a) Que fração representa o total das páginas do livro que Marta já leu até o momento ? $\frac{19}{20}$

$\frac{3}{4_{/5}} + \frac{1}{5_{/4}} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$

4,5 | 2
2,5 | 2
1,5 | 5
1,5 |
$2^2 \times 5 = 20$

Figura 66 – T25 – questão (a) – grupo C – resposta correta

A segunda questão estava relacionada diretamente à primeira, uma vez que o resultado procurado correspondia a diferença entre o total de páginas do livro e a quantidade de páginas já lidas (figura 67).


b) Quanto falta, em número fracionário, para Marta terminar de ler o livro ?

R: $\frac{1}{20}$ páginas

Figura 67 – T25 – questão (b) – grupo A – resposta correta

Alguns grupos demonstraram apropriação indevida do significado do número fracionário em foco, haja vista que pela justificação dada indicaram ter concluído que o livro possuía um total de 20 páginas, confundindo esse valor com o valor calculado para o denominador comum entre as frações originalmente informadas no enunciado da tarefa. Essa compreensão inadequada vem ao encontro do que foi apresentado no capítulo 2 correspondente às Fundamentações Teóricas do presente estudo, no ponto onde é argumentado que enfatizar prioritariamente o significado parte-todo, no qual o "todo" refere-se exatamente à unidade do que se está tratando, no caso da tarefa em análise o total de páginas do livro, pode dificultar o entendimento dos demais significados inerentes aos números racionais pelos alunos, o que me parece ter sido o que ocorreu com alguns grupos (Figuras 68, 69 e 70)

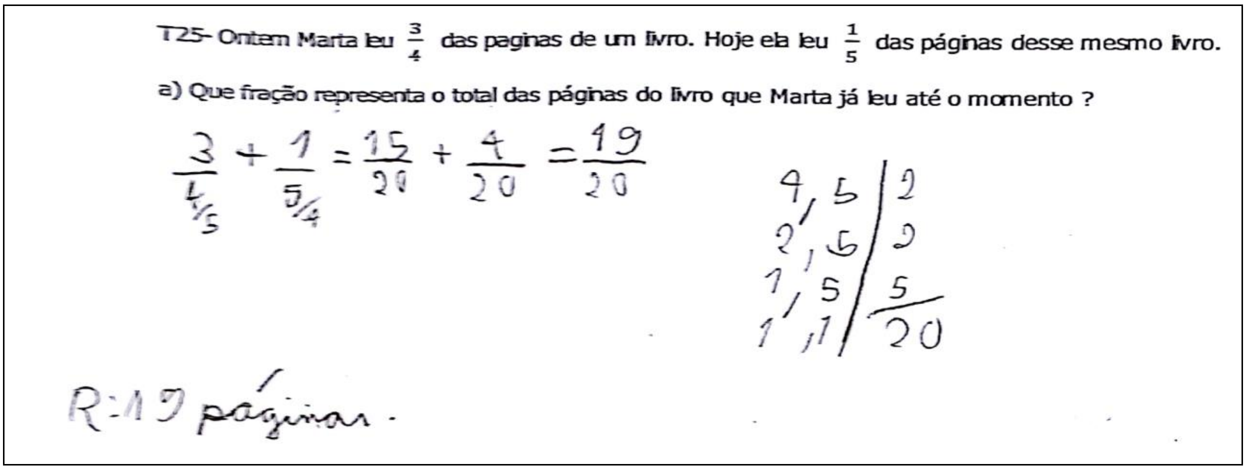


Figura 68 – T25 – questão (a) – grupo A – resposta correta com justificação indevida

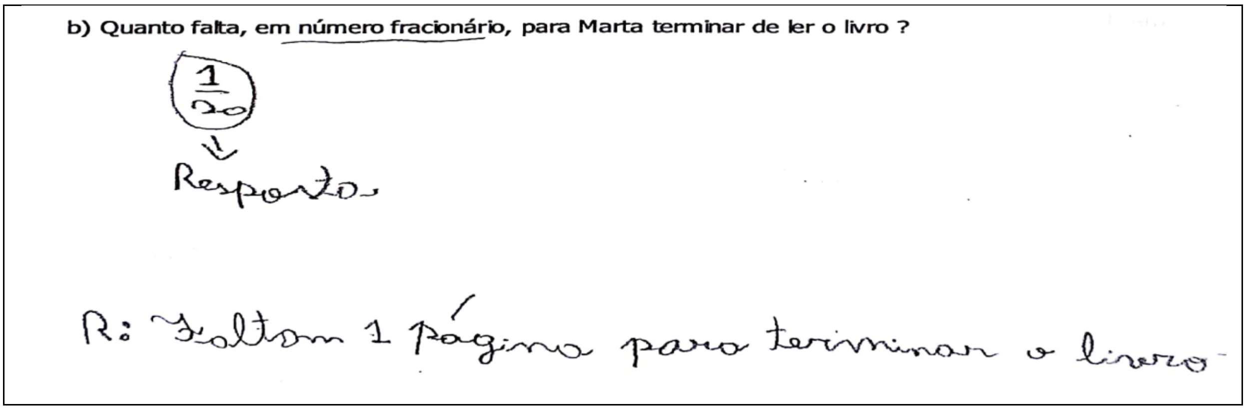


Figura 69 – T25 – questão (b) – grupo E – resposta correta com justificação indevida

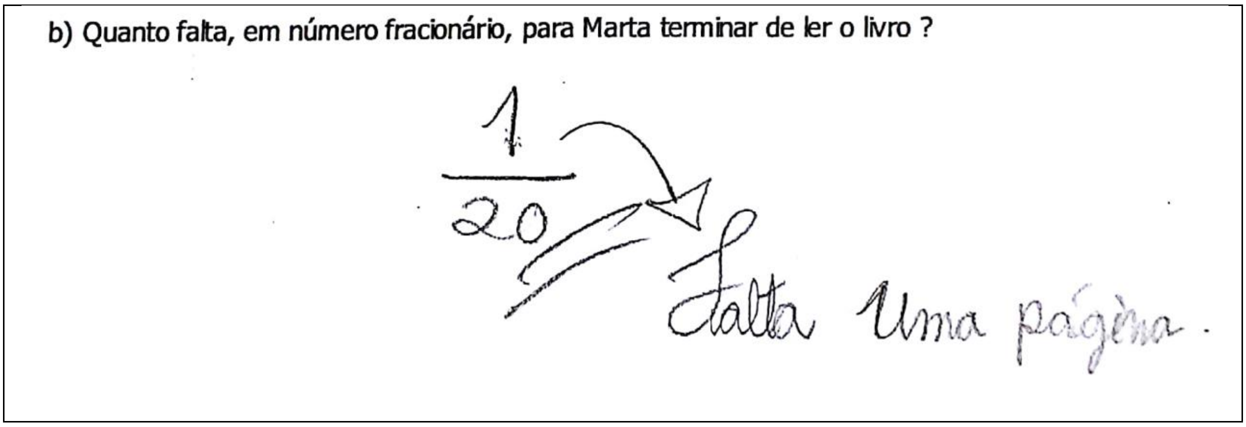


Figura 70 – T25 – questão (b) – grupo J – resposta correta com justificação indevida

Em síntese, nesse momento do estudo, com a investigação já chegando ao seu final, de acordo com o planejamento pré-estabelecido inicialmente, analisando os resultados obtidos e considerando particularmente a presente tarefa, é notório perceber a evolução dos alunos no que se refere aos procedimentos de cálculo envolvendo as operações de adição e subtração de frações. Ainda que os procedimentos de cálculo usados por eles indiquem predominância quase integral do uso de algoritmos em detrimento de outras abordagens didáticas, em especial o uso do modelo linear de barras proposto em nossa investigação, é de se constatar o significativo aumento do índice de acertos alcançados.

Notadamente nesta tarefa as justificações erradas nas respostas dadas por alguns grupos serviram para nos mostrar, na prática, a importância de que os alunos compreendam conceitualmente e da forma devida os diversos significados pertinentes aos números racionais, de forma a evitarem uma leitura errada dos resultados encontrados ao operarem com esse conjunto numérico. Com isso, reitero que dar uma maior ênfase a apenas um dos subconstructos dos números racionais, especialmente o subconstructo parte-todo, pode acarretar constrangimentos à compreensão dos demais significados que os envolvem, dificultando o desenvolvimento necessário ao seu correto entendimento.

5.12 – Tarefa 27 – Adição e subtração de frações

Esta tarefa está dividida em três questões apresentando afirmações sobre adição ou subtração de frações, e os alunos devem analisá-las e classificá-las em Verdadeiro (V) ou Falso (F), corrigindo as que considerarem falsas. As duas primeiras afirmações são falsas por apresentarem estratégias de soluções indevidas, ao adicionarem ou subtraírem os numeradores e denominadores diretamente, sem se ater à necessidade de determinar frações equivalentes para, em seguida, somar os numeradores e repetir o denominador comum.

A terceira afirmação, verdadeira, apresenta duas barras justapostas divididas em oito quadrados cada uma, totalizando dezesseis quadrados, dos quais sete estavam sombreados. Ao lado da barra, a afirmação era de que os quadrados "pintados" correspondia ao resultado da adição $\frac{3}{16}+\frac{1}{4}$.

Quadro 39 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 27 pelos grupos da turma 501

(i) Turma 501					
Questões	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
A	O3	O3	O3	O3	O3
B	O3	O9	O3	O3	O3
C	O15	O15	O3	O3	O15

Quadro 40 - Estratégias de Resolução utilizadas na tarefa 27 pelos grupos da turma 502

(ii) Turma 502					
Questões	Grupo F	Grupo G	Grupo H	Grupo I	Grupo J
A	O3	O3	O3	O3	NS*
B	O3	O9	O9	O3	NS
C	O3	O15	O3	O3	NS

*NS – não solucionou a questão

Quadro 41 - Especificação das Estratégias de Resolução utilizadas pelos alunos na tarefa 27

Estratégias Corretas	Estratégias Incorretas
O3 – Fazer a equivalência das frações, através do processo de cálculo do m.m.c	**O9** – Adicionar ou subtrair os numeradores e denominadores diretamente, como se fossem números naturais $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm b}\right)$ **O15 –** Outras

A primeira afirmação apresentou índice de 90% de acertos, com os grupos respondendo que a mesma era falsa e justificando que para que a adição pudesse ser efetuada era necessário, primeiramente, determinar as frações equivalentes (figura 71). Os 10% restantes não solucionaram a questão.

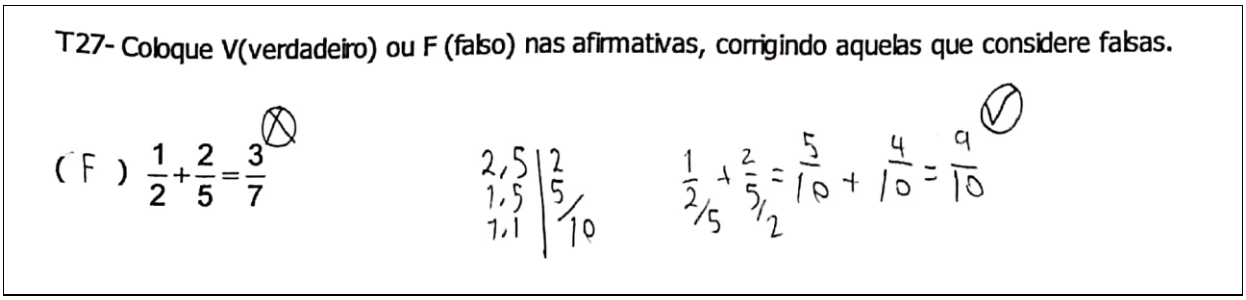


Figura 71 – T27 – afirmação (a) – grupo D – resposta correta

Quanto à segunda afirmação, 60% dos grupos responderam corretamente indicando ser falsa e apresentando a justificação devida, determinando as frações equivalentes e subtraindo seus numeradores, em seguida (figura 72); 30% deram respostas erradas ao concordarem com a subtração direta entre numeradores e denominadores, porém, sem qualquer justificação (figura 73), e 10% não apresentaram solução.

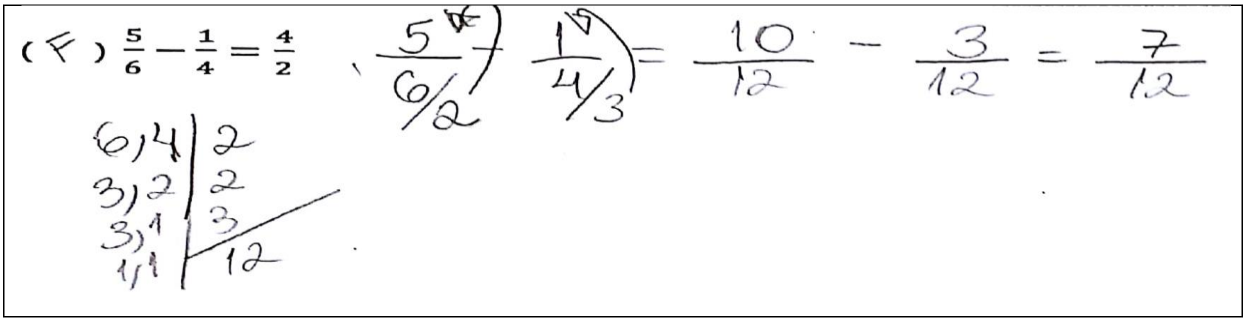


Figura 72 – T27 – afirmação (b) – grupo I – resposta correta

Figura 73 – T27 – afirmação (b) – grupo B – resposta incorreta

Em relação à terceira afirmação, 50% dos grupos acertaram a questão ao responderem que a afirmação era verdadeira e, assim como nas duas afirmações anteriores, apresentaram suas justificações determinando as frações equivalentes e efetuando, na sequência, suas adições (figura 74).

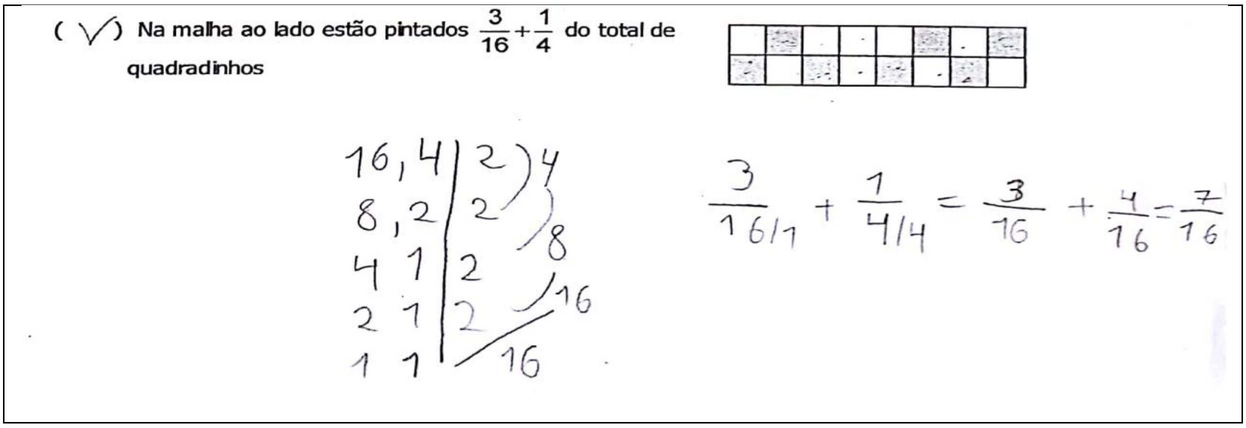


Figura 74 – T27 – afirmação (c) – grupo F – resposta correta

Em contrapartida, 40% responderam incorretamente essa questão, informando ser falsa a afirmação. Todos os quatro grupos tiveram suas estratégias classificadas na categoria O15 - Outras, pois, enquanto um deles apenas responde que a afirmação é falsa sem apresentar qualquer justificação, os outros três grupos cometem erros que apontam mais para uma falta de atenção pontual do que para erros conceituais ou processuais, dentre os quais destaco o grupo E que, apesar de efetuar todo o processo de equivalência de frações corretamente, ao invés de fazer a operação de adição, multiplica os numeradores (figura 75), e o grupo B que, apesar de efetuar todo o processo de adição de forma correta, encontrando a fração $\frac{7}{16}$ como resultado, não estabelece a ligação com as partes sombreadas da figura, classificando a afirmação como falsa (figura 76).

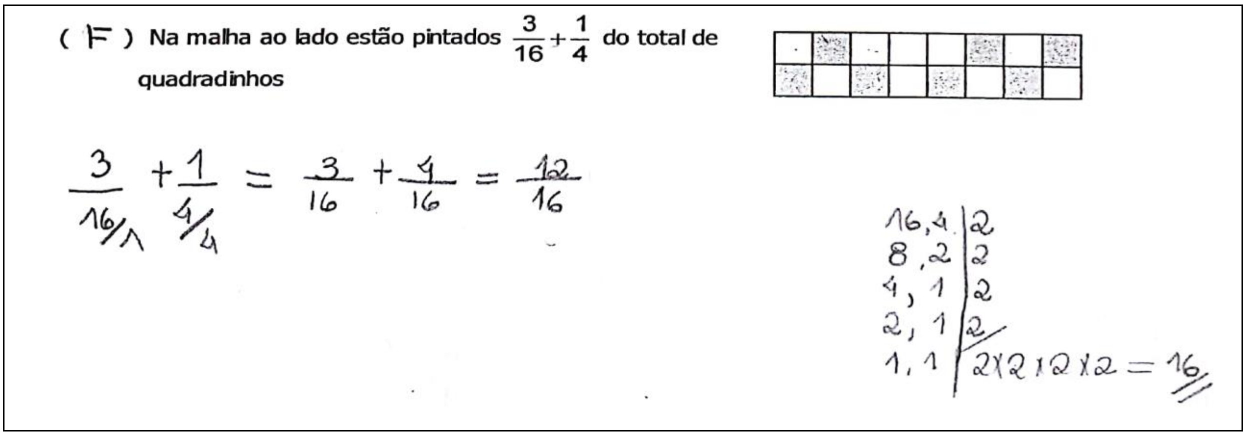


Figura 75 – T27 – afirmação (c) – grupo E – resposta incorreta

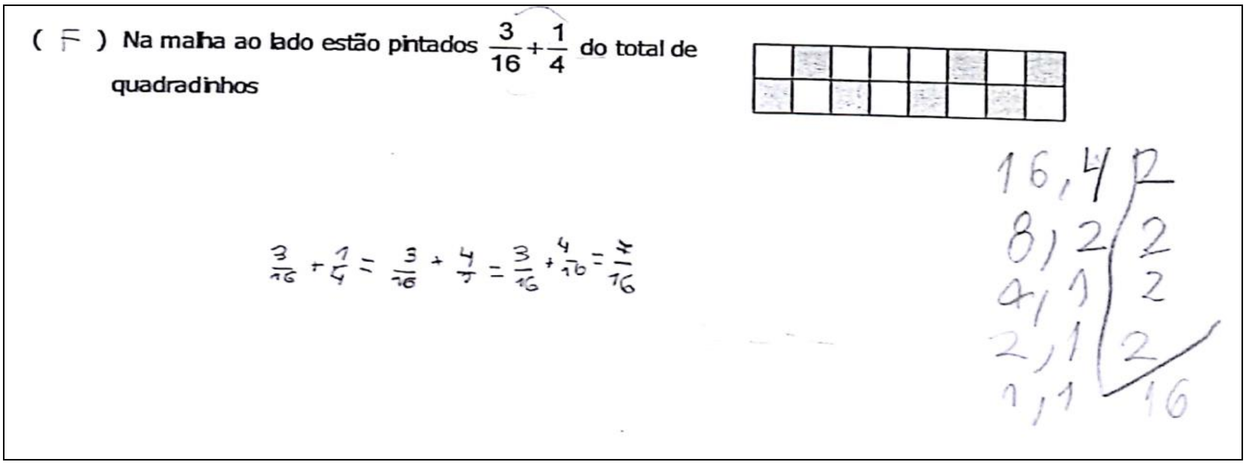


Figura 76 – T27 – afirmação (c) – grupo B – resposta incorreta

Em síntese, esta tarefa tinha por objetivo encerrar o processo de investigação, apresentando duas questões simples contemplando a adição e a subtração de frações com denominadores diferentes e uma terceira questão envolvendo o modelo linear de barras. Todas as questões eram apresentadas como afirmações relacionadas a elas, cabendo aos alunos analisarem se as mesmas estavam corretas ou não, corrigindo às que considerassem falsas.

Pela análise das respostas obtidas, incluídas as justificações dadas, os resultados indicam que os erros cometidos estão mais relacionados a falhas momentâneas durante a realização da tarefa do que a erros derivados de falta de conhecimento conceitual ou processual. Especificamente na terceira afirmação, o uso das barras justapostas com os quadrados sombreados retomou um dos objetivos do presente estudo, proporcionando aos alunos a percepção da correspondência entre as representações simbólicas e visuais dos números racionais.

5.13 – Análise global das tarefas de adição e subtração de frações.

Apresento a seguir, a título ilustrativo, um quadro de uma análise global referente aos resultados das tarefas de adição e subtração de frações (tarefas 18 a 27), com os respectivos índices de acertos, erros e não responde dos grupos de alunos (Quadro 42).

Quadro 42 – Análise global dos resultados das tarefas de adição e subtração

TAREFA	% ACERTOS	% ERROS	% NÃO RESPONDE
18	60	36	4
19	100	-	-
20	100	-	-
21	42,5	57,5	-
22	80	13,5	6,5
23	82	10	8
24	100	-	-
25	75	15	10
26	90	5	5
27	60	30	10

Pela análise dos índices de resultados obtidos nas resoluções das tarefas de adição e subtração de frações, pode-se constatar que os grupos apresentaram média de acertos superior a 75%, com reduzido nível de não solução (menor que 10%) e com um percentual de erros mais expressivo (maior que 50%) concentrado em apenas uma tarefa, sendo esta a primeira tarefa a que os alunos eram expostos à adição de frações com denominadores diferentes, o que pode ter causado um maior constrangimento para eles. É interessante observar que a partir da questão 23 as tarefas passaram a envolver tanto adição quanto subtração de frações com denominadores diferentes e que, como antes, os percentuais de acertos e erros mantiveram-se semelhantes, indicando que a introdução da operação de subtração de frações não representou uma maior dificuldade para os alunos.

6 – Considerações finais:

Neste capítulo, apresento minhas considerações finais sobre o presente estudo com as principais conclusões relativas às questões de investigação propostas, prosseguindo com uma reflexão sobre a relevância que este estudo representou para mim enquanto professor e investigador, e finalizo com algumas ponderações acerca das recomendações e das limitações decorrentes do processo investigativo.

6.1 – Síntese do trabalho de projeto

Este trabalho de projeto, intitulado **Adição e Subtração de Números Racionais na Representação Fracionária: uma proposta de ensino em turmas de 5º ano**, incluiu os tópicos de equivalência e comparação de frações por constituírem-se fundamentos para a correta compreensão conceitual e processual das operações de adição e subtração dos números fracionários, e teve por objetivo final compreender como os alunos adicionam e subtraem números fracionários no contexto de uma unidade de ensino apoiada na utilização do modelo linear de barras, tendo por base as seguintes questões de partida:

- Que recursos e estratégias utilizam e que dificuldades vivenciam os alunos na determinação de frações equivalentes e na comparação de frações, pré-requisitos para as operações de adição e subtração dos números fracionários ?

- Que estratégias utilizam os alunos para adicionar ou subtrair números racionais na sua representação fracionária ?

- Que dificuldades vivenciam os alunos relativamente à adição e subtração de números racionais na sua representação fracionária, ao longo da unidade de ensino ?

Adicionalmente, teço uma reflexão sobre a unidade de ensino implementada e, em particular, acerca das potencialidades do uso do modelo linear de barras como suporte aos alunos na aprendizagem da equivalência e da comparação de frações, bem como das operações de adição e subtração de números fracionários, de acordo com o vivenciado pelos participantes, alunos e professoras, no decorrer da unidade de ensino.

A unidade de ensino planejada resultou em uma sequência de vinte e sete tarefas envolvendo equivalência, comparação, adição e subtração de frações, tendo sido aplicada em um colégio brasileiro privado localizado no Rio de Janeiro, entre os meses de agosto e setembro de 2017, com a participação de 34 alunos de duas turmas, divididos em grupos de 3 ou 4 alunos, em dez aulas de 50 minutos cada.

As tarefas propostas estavam divididas em dois tipos: tarefas de exploração, apresentando situações contextualizadas simples, e tarefas que continham exercícios diretos, sem contextualização. Em ambos os tipos de tarefas, buscou-se solucioná-las utilizando dois modelos de representação em simultâneo: a representação visual, através do modelo linear de barras, e a representação simbólica com o uso de procedimentos algorítmicos, com o intuito de apoiar os alunos na efetivação do cálculo numérico necessário para a resolução das tarefas.

Deste modo, ao recorrer ao uso de contextos e modelos diferenciados no processo de aprendizagem das operações de adição e subtração dos números fracionários, e ao procurar entender com maior profundidade a problemática que envolve a aprendizagem dos conceitos inerentes aos números racionais, fundamentei minha investigação: (i) nos estudos já desenvolvidos por alguns autores, com destaque para os estudos de Kieren e de Behr et al.; (ii) na discussão entre conhecimento conceitual versus conhecimento processual; (iii) nos princípios básicos da Educação Matemática Realista (EMR), preconizados por Freudenthal e seguidores; (iv) na utilização do modelo linear de barras em Singapura e nos seus princípios orientadores; e, (v) nos princípios orientadores apresentados pelos documentos curriculares oficiais brasileiros – PCNs, Diretrizes Curriculares – MEC e descritores – SME-RJ.

Pelas características pertinentes ao estudo, a metodologia adotada enquadra-se nos fundamentos do paradigma interpretativo seguindo uma abordagem qualitativa na modalidade de estudos de casos observacionais, na qual atuei como participante observador, não interagindo com os demais participantes no momento da implementação das tarefas em sala de aula.

Os registros escritos dos alunos com as soluções que apresentaram para as tarefas propostas, constituíram a principal fonte de dados do estudo. Recorri, também, às notas de campo, às gravações em vídeo dos momentos de discussão coletiva após a realização das tarefas e aos registros de conversas informais com as duas professoras envolvidas na investigação.

Para a análise e interpretação dos dados, elaborei três quadros de categorização dos resultados obtidos, de acordo com os conteúdos específicos a que se referiam as tarefas (equivalência, comparação e operações de adição e subtração de frações), com o objetivo de nortear a análise das estratégias e das dificuldades apresentadas pelos alunos.

6.2 – Conclusões

Considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs 1997, 1998) e as Diretrizes apresentadas pelo Ministério da Educação e Cultura – Brasil (MEC), bem como os descritores indicados pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro (SME-RJ, 2017), é a partir do 5.º ano que os conteúdos correspondentes aos números racionais em sua representação fracionária passam efetivamente a fazer parte do percurso escolar dos alunos, ainda que no 2.º e 3.º anos haja a recomendação para que sejam trabalhadas as ideias de fracionamento da unidade para representar partilha em situações do cotidiano, notadamente a metade (meio) e a metade da metade (quarto), e no 4.º ano sejam introduzidas a noção básica de equivalência e a associação de um número decimal a uma fração.

Partindo dessa constatação, ao elaborar as tarefas que compuseram a Unidade de Estudo, considerei indispensável incluir tarefas contemplando a equivalência e a comparação de frações, conteúdos estes preparatórios e indispensáveis para que possa ser estabelecida uma base sólida para a aprendizagem das operações de adição e subtração de números fracionários (Charalambous & Pitta, 2007). Com isso, foram formuladas e implementadas nove tarefas sobre equivalência de frações, seis tarefas sobre comparação de frações, dez tarefas sobre adição e subtração de frações e duas tarefas envolvendo cálculos por estimação.

Apresento as principais conclusões do estudo de acordo com os tópicos e a ordem em que foram trabalhados (equivalência, comparação e adição e subtração) sob a perspectiva das questões de investigação propostas, objetivando compreender o percurso realizado pelos alunos durante a implementação dessa sequência de tarefas.

6.2.1 – Equivalência de frações

Ainda na fase de elaboração da unidade de ensino, tive ciência de que os alunos já haviam tido, em uma aula apenas, uma breve introdução ao conceito de equivalência de frações com o suporte das Barras de Couisenaire, imediatamente antes de entrarem em recesso escolar no meio do ano letivo. Portanto, considerei que esse conteúdo deveria ser retomado com a implementação de um conjunto de tarefas que permitissem uma nova introdução aos conceitos básicos pertinentes ao tema. Assim, as nove tarefas concebidas sobre equivalência de frações foram trabalhadas no decorrer das três primeiras aulas.

Nas tarefas em que as barras pré-desenhadas já se encontravam divididas e as frações originais eram frações unitárias, todos os grupos de alunos representaram corretamente, tanto visual como simbolicamente, as frações equivalentes solicitadas (por exemplo, na primeira questão $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, na segunda questão $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, etc.). Os resultados positivos alcançados nessas tarefas parecem corroborar os argumentos de Santos e Teixeira (2015), quando afirmam que os alunos percebem de forma rápida e clara o conceito de equivalência de frações através da mudança do número de partes iguais em que se subdivide a unidade.

Dentre as estratégias utilizadas pelos alunos, alguns grupos justificaram as suas respostas indicando que os numeradores das frações representavam a metade dos respectivos denominadores, configurando, assim, a equivalência entre as frações. Esta estratégia revela que esses grupos possuem a devida percepção quanto à relação existente entre os numeradores e os denominadores dessas frações e que essa relação deve ser mantida para que possam ser determinadas frações equivalentes às originais, mantendo seus tamanhos originais (CCSSM, 2018).

Outros grupos apoiaram suas linhas de raciocínio no conceito dos múltiplos de um número, multiplicando tanto os numeradores quanto os denominadores das frações originais pelo mesmo fator, encontrando as frações equivalentes. Uma terceira parcela dos grupos não apresentou justificações, apesar de responderem corretamente às questões. A maneira como as barras foram utilizadas nessas tarefas parece indicar que elas serviram como apoio aos alunos para confirmarem os procedimentos de cálculo que haviam efetuado, verificando a razoabilidade de suas repostas (Ventura, 2013).

No entanto, o mesmo índice de acertos não se fez presente em uma das tarefas de equivalência em que a fração original não era uma fração unitária. Os poucos grupos que a responderam corretamente, utilizaram o conceito dos múltiplos de um número como estratégia de solução, multiplicando tanto os numeradores quanto os denominadores das frações originais pelo mesmo fator, determinando a fração equivalente correspondente e fazendo, em seguida, a representação visual devida. Porém, na sua maioria, os alunos demonstraram dificuldade em fazer a transição do valor simbólico para a barra, não percebendo as relações entre os termos das frações e representando-a visualmente de forma indevida.

É necessário considerar que esta foi a última tarefa trabalhada no primeiro dia de aula, no qual os alunos estavam sendo reintroduzidos aos conceitos de equivalência de frações depois de um interregno de quase um mês, além de estarem sendo expostos pela primeira vez a uma abordagem didática diferenciada, a qual não estavam acostumados. O uso de uma fração não unitária aliada à barra pré-desenhada parece ter causado uma maior dificuldade para a compreensão dos alunos, que não conseguiram fazer a transição entre as representações visual e simbólica. Pelas estratégias apresentadas pelos grupos, percebe-se nitidamente a predominância do uso das regras e procedimentos algorítmicos, o que parece reforçar a influência exercida nos alunos de um processo de ensino e aprendizagem que tradicionalmente valoriza o conhecimento processual em detrimento ao conhecimento conceitual.

As três tarefas restantes desse primeiro conjunto (tarefas 6 a 8) envolviam a representação de frações equivalentes na reta numérica, com a finalidade de introduzir os alunos ao subconstructo medida, apoiado nos argumentos preconizados por Wu (2009). Pretendia-se perceber se os alunos compreenderiam a necessidade de que fossem efetuadas novas partições sucessivas dos segmentos representados em cada reta numérica e, adicionalmente, verificar se o trabalho já desenvolvido com o uso do modelo de barras nas tarefas anteriores apoiaria o uso das retas numéricas, uma vez que ambos, por serem representações lineares, guardam fortes similaridades entre si.

Em todas as tarefas, o índice de acertos e erros foi igual: 50% para cada. No entanto, nenhum dos grupos recorreu exclusivamente às retas numéricas realizando novas partições como estratégia de solução, conforme indicações apresentadas pelos enunciados das questões. Os grupos que responderam corretamente, determinaram primeiro as frações equivalentes através da multiplicação dos numeradores e denominadores pelo mesmo fator para, em seguida, representar a resposta encontrada na reta numérica. Quanto aos grupos que apresentaram soluções incorretas, apesar de efetuarem os cálculos necessários à determinação das frações equivalentes, não se atentaram para a definição fundamental de unidade (e de suas partições) (Siegler et al., 2010) bem como das corretas representações dessas partições na reta numérica, reconfigurando indevidamente a unidade em questão, determinando uma localização errada da fração equivalente na reta numérica.

Pelas respostas apresentadas constata-se que os grupos não recorreram ao modelo linear de barras de forma a apoiar suas estratégias de raciocínio para solucionar as tarefas envolvendo posicionamento de frações nas retas numéricas. A utilização intensiva dos procedimentos de cálculo como estratégia para a determinação das frações equivalentes mais uma vez parece reforçar o argumento que o processo de ensino e aprendizagem centrado no uso das representações simbólicas e nos algoritmos a que estes alunos estão habituados desde os anos escolares iniciais, exerce forte influência sobre eles, inibindo o uso de estratégias de soluções diferenciadas.

No entanto, no decorrer da unidade de ensino ficou evidente que a abordagem dos conteúdos propostos através do modelo linear de barras favoreceu a compreensão conceitual da equivalência de frações (Ventura, 2013), o que pôde ser constatado pela postura dos grupos no decorrer dos momentos de discussão coletiva, ao perceberem os erros cometidos e analisados sob a perspectiva do desenvolvimento de linhas de raciocínios apoiadas no modelo linear de barras.

6.2.2 – Comparação de frações

Foram trabalhadas seis tarefas referentes à comparação de frações e em apenas uma delas as frações envolvidas apresentavam o mesmo denominador. Em todas as demais tarefas foram utilizadas frações heterogêneas, o que poderia constituir uma maior dificuldade para os alunos.

Tendo em vista que os alunos já haviam sido incentivados a trabalhar com o modelo linear de barras para solucionar as questões de equivalência de frações implementadas nas três aulas iniciais da unidade de ensino, se revestiu de especial interesse para mim observar as estratégias que seriam utilizadas pelos alunos para efetuarem as comparações solicitadas.

Os alunos continuariam optando por utilizar procedimentos algorítmicos, determinando as frações equivalentes às originais ou calculando as relações entre numeradores e denominadores, ou apoiariam suas linhas de raciocínio na representação visual, utilizando as barras para representarem as frações correspondentes, comparando os resultados encontrados, ou ainda, continuariam a utilizar as barras para confirmar os valores encontrados através de procedimentos algorítmicos ?

Em geral, os alunos apresentaram bons desempenhos nas seis tarefas propostas sobre comparação de frações. Na única tarefa composta por frações homogêneas, todos os grupos responderam corretamente, comparando os numeradores das frações. Nas demais tarefas, as estratégias utilizadas privilegiaram o uso de procedimentos algorítmicos, predominando a determinação das frações equivalentes para que pudessem ser efetuadas as comparações solicitadas (Llinares & Sánchez, 1988). Poucos foram os grupos que recorreram exclusivamente às barras para apoiarem suas resoluções.

Em relação a maioria dos grupos que respondeu incorretamente às questões, em geral suas estratégias apontaram para falta de atenção durante a realização da tarefa, não indicando, portanto, erros referentes à falta de compreensão do conteúdo em questão. Ainda assim, em alguns grupos ficou evidenciada uma dificuldade associada ao tratamento dos numeradores e denominadores de forma isolada, como se fossem dois números independentes, sem o estabelecimento de qualquer relação entre eles, o que parece indicar uma persistente influência dos conceitos atrelados aos números naturais nos números fracionários (Siegler et al., 2010).

Quanto às estratégias de resolução das tarefas a que os grupos recorreram, os procedimentos algorítmicos predominaram novamente, com as barras servindo mais para confirmar resultados (Ventura, 2013) do que como estratégia de solução escolhida.

6.2.3 – Adição e subtração de frações

Foram implementadas dez tarefas referentes à adição e subtração de frações, das quais sete compunham um grupo de tarefas que continham exercícios sem contextualização, e dentre estas três apresentavam barras pré-desenhadas para que os alunos representassem as suas soluções tanto simbolicamente como visualmente. As outras quatro tarefas desse grupo não indicavam a maneira como deveriam ser solucionadas, ficando a cargo de cada grupo escolher a estratégia que melhor lhes aprouvesse. As três tarefas restantes, correspondentes ao segundo grupo, eram compostas por situações contextualizadas simples, também sem qualquer indicação de caminho para suas resoluções.

Os alunos obtiveram bons resultados ao solucionarem essas tarefas, pois, em geral, os grupos apresentaram média de acertos superior a 75%, com exceção da tarefa 21, na qual apenas 42,5% dos grupos responderam corretamente as questões. Convém notar que esta foi a primeira das tarefas a tratar de adição de frações com denominadores diferentes, o que pode ter representado uma maior dificuldade para os alunos.

Cabe notar, também, que não ocorreram disparidades entre os níveis de acertos de tarefas referentes à adição e à subtração de frações, tendo sido alcançados índices similares entre os tipos de questões. O mesmo se pode concluir das tarefas com ou sem contextualização, talvez pelo fato das situações contextualizadas não apresentarem grandes níveis de dificuldades, sendo facilmente reconhecíveis e/ou interpretadas pelos alunos.

Quanto às estratégias utilizadas pelos alunos, mais uma vez houve primazia da representação simbólica sobre a representação visual, com o uso de procedimentos algorítmicos sendo utilizados para solucionar a maioria das tarefas. Dentre esses procedimentos, o algoritmo mais utilizado pelos alunos nas operações foi o da decomposição simultânea em fatores primos, ensinado e trabalhado de forma intensiva imediatamente antes da introdução da equivalência e comparação de frações, geralmente em tarefas em que é necessário determinar o m.m.c ou o m.d.c entre fatores.

O método da decomposição simultânea em fatores primos é automaticamente utilizado para a determinação dos denominadores comuns entre frações heterogêneas, servindo de suporte para as tarefas que envolvam comparação, adição e subtração de frações. Por sua vez, os alunos sentem-se confortáveis para aplicá-lo, uma vez que, independentemente da quantidade de frações que estejam sendo manipuladas, seu cálculo é efetuado de forma simples e rápida.

Adicionalmente, foram trabalhadas duas tarefas envolvendo cálculos com frações por estimação apresentando os valores $\frac{1}{2}$ e 1 como referenciais, objetivando perceber a habilidade de estimativa dos alunos como estratégia de solução (Lestiana, 2014). A primeira tarefa foi implementada durante o período planejado para a recolha de dados e apresentou índice de 60% de acertos; no entanto, dos seis grupos que responderam corretamente, cinco não seguiram a indicação do enunciado da tarefa que indicava que as questões fossem resolvidas por estimação. A segunda, elaborada como uma tarefa extra, foi trabalhada após o término do período originalmente definido para a unidade de ensino e apresentou índice ligeiramente melhor que a primeira (70% de acertos), porém, novamente a maioria dos grupos não se atentou para a forma de resolução solicitada e, mais uma vez, recorreram ao uso de algoritmos para responder as perguntas. Novamente, em ambas as tarefas, apenas dois grupos utilizaram o modelo linear de barras como suporte de suas estratégias.

O uso recorrente de procedimentos algorítmicos como estratégia para solucionar as tarefas pelos alunos, apesar deles terem sido expostos ao modelo linear de barras durante todo período de tempo em que a unidade de ensino decorreu, parece confirmar uma maior predominância da representação simbólica e dos procedimentos algorítmicos no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a criação de um "hábito" que já se percebe enraizado nos alunos; assim, eles, ao se depararem com tarefas que não lhes indique de que modo devem respondê-las, mas que, pelo contrário, lhes permita escolher a forma que melhor lhes convier, é inevitável que a tendência seja a de optar pelo uso da representação simbólica.

6.2.4 – Considerações sobre a unidade de ensino

Na unidade de ensino planejada, a abordagem didática escolhida tinha por objetivo apresentar inicialmente os conceitos pertinentes a cada conteúdo através do modelo linear de barras, de forma a permitir que os alunos percebessem visualmente as representações fracionárias e as operações indicadas, e que durante a realização das tarefas propostas pudessem recorrer às barras para fazerem as representações correspondentes e solucioná-las; simultaneamente, apresentava-se a representação simbólica com o uso de algoritmos, quando necessário, estabelecendo a relação entre as duas representações. Observe-se que, até aquele momento, os alunos não haviam trabalhado de forma contínua e consistente com o modelo linear de barras, o que o configurava, neste sentido, uma novidade em termos de abordagem didática e, portanto, um ponto a ser observado no que concerne à relação estabelecida pelos alunos com essa abordagem.

A barra numérica, pela sua simplicidade e facilidade de aplicação, mostrou-se um instrumento útil para promover a aprendizagem conceitual das frações (van Galen et al., 2008), facilitando a visualização da equivalência e da comparação de frações, e promovendo a construção da base para que os alunos pudessem alcançar a correta compreensão das operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, levando-os à conclusão que só podem adicionar frações quando a unidade se encontra dividida em partes iguais. A referência frequente às "partes pintadas" feitas pelos alunos durante as discussões coletivas mostra bem a importância que a barra numérica teve para os alunos para o desenvolvimento de suas compreensões conceituais.

Contudo, apesar da professora ter recorrido ao uso do modelo linear de barras de forma intensiva, tanto na introdução de cada tópico como nos momentos de discussão coletiva das tarefas trabalhadas de forma a relacionar as representações visuais e simbólicas, poucos foram os grupos que recorreram às barras, por iniciativa própria, como estratégia exclusiva de solução para resolverem as questões. Em geral, os alunos não demonstraram flexibilidade em suas escolhas e habilidades e não optaram por usar o modelo linear de barras para resolver as questões propostas, preferindo apoiar suas soluções nos procedimentos algorítmicos com os quais já estavam habituados.

Cabe destacar que as intervenções dos alunos nos momentos de discussão coletiva sugerem que a componente visual foi importante para que estabelecessem o relacionamento com a representação fracionária simbólica, além de ter apoiado consideravelmente a percepção e a compreensão dos erros que haviam cometido nos momentos em que foram analisados em conjunto com a professora e os demais alunos das turmas.

Outro aspecto a sublinhar está relacionado à solicitação de que sejam apresentadas justificações das soluções encontradas pelos alunos na maioria das tarefas. Pela minha experiência lecionando em colégios brasileiros, públicos ou privados, no Brasil ainda não é habitual requerer dos estudantes justificações em linguagem corrente ao resolverem problemas matemáticos, não sendo comum solicitar que verbalizem seus raciocínios, confrontando-os com outros. O próprio desenvolvimento das suas linhas de raciocínio em linguagem matemática, combinado com os procedimentos algorítmicos usados na resolução de uma tarefa, é suficiente para que se subentenda que uma justificação foi apresentada e, a partir daí, poder ser avaliada. Portanto, o comportamento dos alunos face à demanda de justificações tornou-se outro ponto interessante para compor a nossa análise.

Ainda que a comunicação matemática verbal e escrita em linguagem corrente não configure um dos focos desse estudo, pôde-se constatar no decorrer do processo investigativo um importante ganho de fluidez e coerência no discurso de alguns estudantes, o que percebo como produto direto resultante do crescimento da confiança desenvolvida nos alunos pelo incremento da compreensão conceitual dos conteúdos trabalhados e pelo estímulo à apresentação de argumentos durante os momentos de discussão coletiva.

6.3 – Recomendações

Ao escolher debruçar-me sobre o tema dos números racionais em sua representação fracionária e ao fundamentar a elaboração da unidade de ensino através da revisão de literatura que fiz no decorrer de todo o processo investigativo, conjugados à minha própria experiência como docente, compreendi que o processo de ensino e aprendizagem deve ter como suporte uma abordagem didática coerente e consistente, que privilegie o conhecimento conceitual dos tópicos a serem estudados, antes de passar para o ensino das regras e dos procedimentos algorítmicos relacionados a eles.

Uma abordagem que, ao ser trabalhada de forma contínua e regular desde os anos escolares iniciais, possibilite que os alunos criem uma significativa sensação de familiaridade com essa abordagem, permitindo o desenvolvimento de uma maior confiança neles próprios, e estimulando-os a recorrerem a ela sempre que precisem solucionar alguma tarefa, seja esta uma tarefa que contenha algo já trabalhado anteriormente ou um tópico novo, na qual tentarão aplicar os conhecimentos previamente adquiridos e, por conseguinte, apoiar um novo conhecimento.

Expor os alunos, ano após ano, a abordagens didáticas diferenciadas que reflitam as especificidades e crenças de cada professor, e que muitas vezes são apresentadas sem qualquer ligação com os métodos e procedimentos utilizados em sala de aula pelos docentes dos anos escolares anteriores e com os quais os alunos já estavam acostumados, pode acarretar maiores constrangimentos do que avanços no processo de aprendizagem. É recomendável que as abordagens adotadas guardem afinidades entre si, de forma a constituírem-se um suporte para os alunos em seus percursos escolares.

Neste sentido, o método linear de barras configura uma abordagem didática que, ao ser utilizado desde os anos escolares iniciais a partir dos conceitos matemáticos mais elementares, poderá proporcionar aos alunos uma maior vinculação à Matemática, uma vez que possibilitará a eles adquirirem uma mais aprofundada compreensão conceitual dos tópicos abordados através de uma representação visual simples e direta, propiciando o suporte necessário para o desenvolvimento dos seus conhecimentos processuais. Assim, quando os alunos chegarem à fase das operações com frações, a utilização das barras apoiará de forma simples e natural a compreensão dos alunos quanto aos conceitos inerentes às referidas operações.

Com base nessa perspectiva, faz-se necessário recomendar o redimensionamento da quantidade de atividades e do tempo estipulado para a realização das mesmas em sala de aula. Mais importante do que trabalhar diversas questões de forma “corrida” em uma mesma aula, é trabalhar poucas questões de forma aprofundada, que permita apresentar e discutir com os alunos diversas estratégias de solução para uma mesma pergunta. Estou convicto de que limitar o número de questões durante uma aula de forma a permitir um aumento do tempo destinado às discussões coletivas representa um importante contributo à aprendizagem significativa e ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos.

Considerando especificamente o tema do presente estudo, é recomendável introduzir as frações no currículo escolar de forma mais flexível, através da apresentação e do uso de variadas representações e de suas inter-relações (Bressan et al., 2016; Rangel et al., 2017). O processo de ensino e aprendizagem dos números racionais deve ser implementado a partir de situações contextualizadas simples, de fácil reconhecimento e/ou interpretação por parte dos alunos, proporcionando a eles o conhecimento conceitual necessário, e deve prosseguir desenvolvendo-se gradualmente, até atingir níveis mais complexos, possibilitando aos alunos aprofundarem seus conhecimentos através de tarefas com diferentes níveis de profundidade e, por conseguinte, mais desafiadoras (Middleton et al., 1998). Dessa forma, os alunos se sentirão mais seguros para utilizarem, ainda que muitas vezes de forma intuitiva, estratégias diversificadas através das variadas representações trabalhadas para solucionarem as tarefas que lhes são propostas.

A opção por uma abordagem didática apoiada no modelo linear de barras para o desenvolvimento da Unidade de Ensino mostrou-se acertada, uma vez que este é um modelo fácil de ser construído e de grande adaptabilidade para representar as frações. Adicionalmente, considerando que os alunos participantes deste estudo estavam acostumados a um processo de ensino e aprendizagem voltado para a representação simbólica através do ensino de regras e procedimentos algorítmicos, julgo que também foi acertada a decisão de transitar entre as representações visuais e simbólicas concomitantemente, na quase totalidade das tarefas propostas.

Essa forma de conduzir as tarefas e as discussões coletivas permitiu a professora demonstrar facilmente aos alunos as relações existentes entre as duas representações e a esclarecer equívocos cometidos no uso de procedimentos algorítmicos em todas as etapas da unidade de ensino e, em especial, nas operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, proporcionando aos alunos efetivo aumento da compreensão conceitual acerca desses tópicos.

Quanto às tarefas a serem trabalhadas, penso ser recomendável dar uma maior atenção àquelas que criem oportunidades para que os alunos estabeleçam relações lógicas para solucioná-las, sem que tenham que recorrer a procedimentos algorítmicos. Neste sentido, tarefas que estimulem o incremento das capacidades de estimação e visualização, auxiliando os alunos a antecipar e a julgar resultados durante a resolução de um problema, poderão contribuir para que eles desenvolvam uma maior confiança quando tiverem que calcular resultados exatos.

Sob a perspectiva de que vivemos em um tempo em que mudanças substanciais ocorrem velozmente, expondo-nos à necessidade de estarmos sempre em constante aperfeiçoamento através do desenvolvimento de nossos conhecimentos e habilidades, entendo ser importante que nós, docentes, estejamos imbuídos desse espírito e que mantenhamo-nos atualizados com o objetivo de aprimorarmo-nos, o que nos possibilitará proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem mais enriquecedoras. Compreender com profundidade as respostas apresentadas pelos alunos e identificar os pontos em que os conhecimentos deles ainda estão falhos e em quais estão de acordo, permite ao professor auxiliá-los a alcançar o entendimento necessário, prevenindo acúmulo de equívocos.

Cabe aqui ressaltar a mais valia que foi ter a participação das professoras Lorena e Fernanda neste estudo, que mostraram-se, desde as conversas informais sobre o projeto de investigação até a conclusão da fase de implementação das tarefas, inteiramente disponíveis e interessadas, colocando dúvidas e trazendo sugestões ao processo. A atitude questionadora da professora Lorena, a quem coube estar mais à frente no decorrer da implementação da Unidade de Ensino, especialmente nos momentos de discussão coletiva com as turmas, incentivou os alunos a refletirem sobre o trabalho desenvolvido, conduzindo-os na avaliação das diferentes estratégias apresentadas bem como na compreensão dos equívocos cometidos por eles ao solucionarem as tarefas propostas, além de estimulá-los a estabelecerem as relações entre as representações visuais e simbólicas das frações.

6.4 – Limitações do Estudo

A aprendizagem significativa dos números racionais, em especial em sua representação fracionária, é um processo gradual que requer tempo e preparo, pois, devem ser levadas em consideração as particularidades inerentes a esse conjunto numérico e os diversos conceitos a eles atrelados, e que se não forem desenvolvidos de forma consistente com a necessária compreensão por parte dos alunos, acabam por representar sérios constrangimentos para seus percursos escolares.

Uma das limitações deste estudo prende-se exatamente ao tempo que tive para implementar a unidade de ensino elaborada. Como o mesmo foi realizado em um colégio do Rio de Janeiro durante o meu período de férias letivas do curso de Mestrado, foi necessário adequar a fase de recolha de dados ao período de tempo disponibilizado para esse fim pelas professoras participantes e pela direção do colégio, levando em consideração o planejamento didático de forma a não acarretar qualquer inconveniente para o desenvolvimento regular das aulas das turmas envolvidas no projeto. Assim, todas as vinte e sete tarefas constantes da unidade de ensino tiveram que ser trabalhadas em duas semanas, entre os meses de agosto e setembro de 2017, não havendo a possibilidade de que esse período fosse ampliado, caso necessário, uma vez que ao fim dessas duas semanas, retornei a Portugal para retomar as minhas atividades.

Considero, também, que poderia ter dimensionado de forma diferente a quantidade de tarefas trabalhadas na unidade de ensino. A implementação de vinte e sete tarefas no decorrer de duas semanas divididas em dez aulas, pode ter contribuído para que alguns alunos, em especial os menos afeitos à matemática, vivenciassem um processo de cansaço. Penso que aplicar uma menor quantidade de tarefas, abrindo um espaço maior para as fases de introdução aos tópicos e de discussão coletiva poderá proporcionar um maior contributo ao processo de aprendizagem, permitindo aos alunos que reflitam de forma mais aprofundada sobre os temas e os conhecimentos que vão adquirindo, com o objetivo de que consolidem melhor as operações com os números fracionários, especialmente com o estímulo ao uso do modelo linear de barras.

Outra limitação a destacar refere-se ao tamanho da amostra que, por abranger uma quantidade reduzida de participantes, não permite que sejam feitas generalizações dos resultados encontrados a outras situações e realidades, respeitando apenas à população em questão. No entanto, essa é uma das características presentes na modalidade de investigação qualitativa escolhida para fundamentar o presente estudo e, apesar de não apresentar a possibilidade de generalizar de forma ampla as respostas encontradas, lança um foco de luz direcionado sobre as questões estudadas permitindo que, em maior ou menor grau, as conclusões advindas da investigação possam ser reconhecidas, transferidas ou aplicadas a outros grupos com características semelhantes.

6.5 – Reflexões finais

As minhas primeiras formações universitárias não estavam diretamente relacionadas ao ensino da Matemática, apesar de terem seus fundamentos alicerçados nesse domínio: completei inicialmente o bacharelato em Economia e, na sequência, me pós-graduei em Engenharia Econômica e Administração Industrial, tendo atuado durante dezoito anos na área financeira em empresas de diversos ramos de atividade econômica. Em paralelo, lecionava Matemática Financeira, em caráter pontual, para pequenos grupos constituídos por profissionais, estudantes universitários ou estagiários, com o objetivo de prepará-los para a atividade profissional em áreas correlatas a essa disciplina, além de atuar em centros de explicação para alunos dos ensinos básico e secundário.

Com o passar do tempo, comecei a perceber que a atividade docente estava se tornando cada vez mais presente em minha vida e que, sem sombra de dúvida, era a atividade que mais satisfação profissional me trazia. Decidi, então, voltar aos bancos universitários para licenciar-me em Matemática, o que aconteceu ao fim de 2004. A partir de 2005 passei a atuar profissionalmente como professor de Matemática em escolas públicas e colégios privados, em caráter de exclusividade.

Com a experiência adquirida em sala de aula nos últimos anos e ciente de que a formação de um educador deve ser contínua, resolvo prosseguir meus estudos no campo da Educação Matemática, com o objetivo de aprimorar-me profissionalmente. Dessa forma, opto por inserir-me no Mestrado em Educação – Didática da Matemática, através do qual pude não somente colocar-me em dia com as investigações acadêmicas que vem sendo realizadas na área, de forma geral, como também aprofundar, especificamente, meus conhecimentos acerca das dificuldades que envolvem a aprendizagem dos números racionais, tema para o qual dediquei o meu trabalho de projeto.

Realizar este trabalho de projeto representa, portanto, um momento importante nas minhas trajetórias pessoal e profissional, a começar pelo fato de que para aqui chegar, tive que reinventar-me, pois, ao transferir-me para Portugal, reiniciei não somente a minha vida acadêmica como também profissional, afastando-me de uma vida já alicerçada e, de certa maneira, estável no Brasil.

Ao finalizar esse projeto e ao olhar para trás e remontar na memória os passos dados, desde a concepção da ideia do estudo, passando pela formulação das questões, a leitura e seleção dos textos para comporem o quadro teórico, a elaboração da unidade de ensino, a recolha e a análise dos dados, até a conclusão do estudo, faz-me reconhecer o imenso significado que todo esse processo constituiu para mim, e que, muito mais do que representar o encerramento de mais uma etapa na minha trajetória, configura uma abertura e um estímulo para seguir em ciclos futuros de desenvolvimentos acadêmico e profissional.

Os resultados desse estudo permitiram-me constatar na prática que o desenvolvimento do conhecimento conceitual dos alunos acerca das operações de adição e subtração de frações, vivenciados com o suporte do modelo linear de barras, a partir de uma sequência didática implementada através de uma abordagem simples, contínua, coerente e reflexiva, proporcionou a base necessária para que desenvolvessem, em paralelo, seus conhecimentos processuais, auxiliando, adicionalmente, a identificação das principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dessas operações.

Como reflexão final, considero que este estudo enriqueceu, de forma significativa, o meu conhecimento profissional e, simultaneamente, proporcionou a todos os participantes do projeto, em especial aos alunos e as professoras envolvidas, uma experiência de qualidade onde as aprendizagens foram efetivas e as práticas de trabalho relevantes.

A reforçar o sentimento que tenho de que os alunos conseguiram efetivos progressos acerca do conhecimento conceitual e processual das operações de adição e subtração de frações, a partir das tarefas implementadas na unidade de ensino com o suporte do modelo linear de barras, um ano após a sua realização, a professora Fernanda entrou em contato comigo para perguntar se eu autorizava que ela utilizasse com suas novas turmas a abordagem didática e as tarefas trabalhadas por nós na fase da recolha de dados, o que veio reforçar em mim a certeza de que eu havia, em conjunto com os demais participantes da investigação, realizado algo de positivo em relação ao processo de ensino e aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária.

7 - REFERÊNCIAS

Aires, I. (2015). *Paradigma Qualitativo e Práticas de Investigação Educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and Issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication, *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 42-46.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

BRASIL. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 1-4. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 5-8. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Bressan, A.M., Gallego, M.F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista – Bases Teóricas*. Bariloche: GPDM.

Bruce, C., Chang, D., & Flynn, T. (2013). *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction*. Ontario: Ministry of Education.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, *27*(5), 777-786.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Castelo de Vide: SPIEM.

Caraça, B. de J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical modelo on fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 233-240). Melbourne: PME.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Clark, A. (2004). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems – Model Drawing in Math in Focus. Acessado de www.hmheducation.com/mathinfocus, em 18/05/2018.

Common Core Standards for Mathematics – Standards for Mathematical Practice (2018). Acessado de http://www.corestandards.org/Math/Practice/ em 15/08/2018.

Cramer, K., Wyberg, T., Leavitt, S. (2008). The Role of Representations in Fraction Addition and Subtraction. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *13*(8), 490-496.

Cruz, M.S.S., & Spinillo, A.G. (2014). Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro. *Estudos de Psicologia*, *19*(4), 241-249.

Dante, L. R. (1985). Como ensinamos: uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática. *Revista do Professor de Matemática*, *6*, 32-35.

Davis, C., & Espósito, Y. (1991). O papel e função do erro na avaliação escolar. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *72*(171), 196-206.

Emeny, W. (2014). Bar modelling – a powerful visual approach for introducing number topics. Acessado de http://www.greatmathsteachingideas.com/2014/12/26/bar-modelling-a-powerful-visual-approach-for-introducing-number-topics/ em 15/07/2018

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Ferreira, P.E.A., & Buriasco, R.L.C. (2016). Educação Matemática Realista: uma abordagem para os processos de ensino e aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(1), 237-252.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2009). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Freire, P.C. (2011). *Uma jornada por diferentes mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária*. Universidade Bandeirante de São Paulo.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1-2), 3-8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(3-4), 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Riedel Publishing Company.

Freundenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education - China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Geary, D. C. (1994). *Children's Mathematical Development: Research and Practical Applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

Honorato, A., Flores, C., Salvaro, G., & Leite, M.I. (2006). Vídeo-gravação como registro, a devolutiva como procedimento: pensando sobre estratégias metodológicas na pesquisa com crianças. In: *Atas da reunião anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu: ANPEd..

Johanning, D. I. (2011). Estimation's Role in Calculations with Fractions. *Mathematics Teaching in The Middle School, 17*(2), 96-102.

Keijzer, R. (2003). *Teaching Formal Mathematics in Primary Education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson Publishing Company.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and Measurement (pp. 101-144). Columbus: Ohio State University, EEIC, SMEAC.

Kieren, T.E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-180). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Kieren, T.E. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. In T. Sowder & B.P. Schapelle (Eds.), Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades (pp. 31–66). Albany, New York: SUNY Press.

Koleza, E. (2015). The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1940-1946). Prague, Czech Republic: CERME.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Llinares, S. C., & Sánchez, M. V. G. (2000). *Fracciones: la relación parte-todo*. Madrid: Sintesis.

Lessa, V. E. (2015). O Significado *Medida* dos Números Fracionários: aprendizagens na forma de conhecimentos em ação. *REVEMAT 10*(1), 100-113.

Lestiana, H. T., Abadi, A., Budiarto, M. T., Abels, M. J., & van Eerde, D. (2014). Promoting students' understanding of the addition of fractions. In R. I. I. Putri (Ed.), *The second South East Asia Design/ Development Research (SEA-DR) International Conference* (pp. 142-151). Palembang: Sriwijaya University.

Magina, S., & Campos, T. (2008). A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. *Bolema*, *21*(31), 23-40.

Mathematics Syllabus – Primary one to Five. (2012). Ministry of Education – Singapore. Acessado de https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/primary_mathematics_syllabus_pri1_to_pri5.pdf em 18/02/2018

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using Bar Representations as a Model for Connecting Concepts of Rational Number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 302-312.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14* (1), 89-107.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o Sentido do Número Racional*. Lisboa: APM.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: a new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Mumma, J., & Panza, M. (2011). Diagrams in mathematics: history and philosophy. Synthese, 186:1–5. DOI 10.1007/s11229-011-9988-3.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (tradução). Lisboa: APM.

NMAP. (2008). The final report of the National Mathematics Advisory Panel. ED Pubs, Education Publications Center, U.S. Department of Education.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3*, 63-75.

Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. L. (2010). *A Focus on Fractions – Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge.

Pinto, H. (2011). O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.) O Professor e o Desenvolvimento Curricular, pp. 11-34. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e Comparação de Números Racionais em Diferentes Representações: Uma Experiência de Ensino* (dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Rangel, L., Meirelles, R., Cupolillo, R., Sajnim, C., & Almeida, L. F. (2017). A Representação Pictórica na Resolução de Problemas: Explorando o Modelo de Barras. In Atas da Bienal de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S., & Alibali, M.W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill. In Mathematics: an intuitive process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346-362.

Romanatto, Mauro C. (1999). Número Racional: uma teia de relações. *Zetetike*, *7* (12), 37-49.

Santos, C. P., & Teixeira, R. C. (2015). Frações – Parte 1. *Jornal das Primeiras Matemáticas*, *5*, 41–74.

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The Developmental Relations Between Conceptual and Procedural Knowledge: A Multimethod Approach. *Developmental Psychology*, *46*(I), 178-192.

Schwartz, J. E. (2008). A Distinction Between Conceptual Knowledge and Procedural Knowledge. In J. E. Schwartz (Ed.), *Elementary Mathematics Pedagogical Content Knowledge: Powerful Ideas for Teachers* (pp. 7-8). New Jersey: Pearson Allyn Bacon Prentice Hal.

Serapioni, M. (2000). Métodos qualitativos e quantitativos na pesquisa social em saúde: Algumas estratégias para a integração. *Ciências da Saúde Colectiva*, *5*(1), 187-192. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/csc/v5n1/7089.pdf.

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, Naming and Justifying Fractions. *Teaching Children Mathematics*, *12*(8), 394-400.

Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, *127*(4), 377-397.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten through 8th Grade*. Acessado de https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/fractions_pg_093010.pdf, em 20/03/2018

Streefland, L. (1991). *Fractions, an integrated perspective*. In L. Streefland (Ed.), Realistic mathematics education in primary school (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Teixeira, R.C. (2015). Ensino da Matemática: o método de Singapura. Atlântico Expresso, outubro de 2015.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics programm for primary education. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 21–56). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002) *Realistic Mathematics Education as work in progress*. Acessado de www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf em 05/10/2017

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics,54*, 9-35.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Science.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions - a Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Vasconcelos, I. C. P. (2007). *Números fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos de 4ª a 8ª séries de uma escola do ensino fundamental* (dissertação de mestrado). UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul.

Ventura, H. (2013). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico* (tese de doutoramento).Universidade de Lisboa, Lisboa.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*(5), 445-451.

Watanabe, T. (2012). Representations in Teaching and Learning Fractions. *Teaching Children Mathematics, 8*, 457–63.

Wheeldon, D. A. (2008). *Developing mathematical practices in a social context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions* (dissertation for the degree of Doctor of Education). University of Central Florida, Orlando, Florida.

Wu, H. (2005). *Key Mathematical Ideas in Grades 5-8*. Acessado de https://math.berkeley.edu/~wu/NCTM2005a.pdf em 05/05/2018.

Wu, H. (2009). What's Sophisticated about Elementary Mathematics? Plenty – That's Why Elementary Schools Need Math Teachers. *American Educator, outono de 2009*, 4-14.

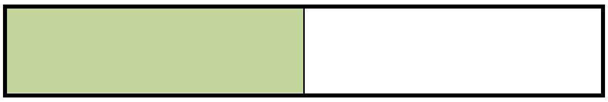
Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola aqui e agora*. Porto Alegre: Artes Médicas.

ANEXOS

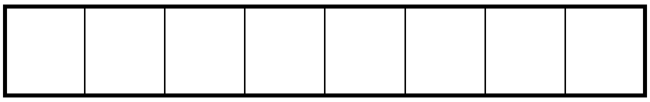
Anexo 1 - TAREFA 1

T1- As barras a seguir são do mesmo tamanho, estando cada uma delas divididas em partes iguais.

(A)



(B)



a) Quantas partes de ***B*** precisamos sombrear para que ela tenha a mesma área sombreada de ***A*** ?

b) Escreva frações que representem as áreas sombreadas das duas barras.

Barra A = _______

Barra B = _______

c) Analisando as duas frações escritas, você pode dizer que são frações equivalentes ? Explique seu raciocínio.

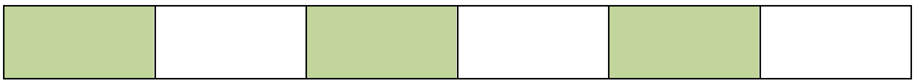
Anexo 1 - TAREFA 2

T2- Quais das barras são equivalentes a $\frac{1}{2}$ da barra inteira ? Justifique a(s) sua(s) escolha(s).

(A)

(B)

(C)

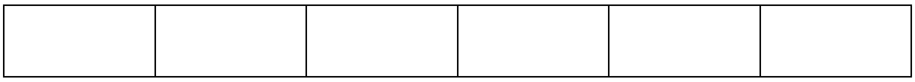


(D)

Anexo 1 - TAREFA 3

T3- Considere a barra inteira abaixo.

a) É possível representar nesta barra a fração $\frac{2}{3}$? Justifique o seu raciocínio.



b) Agora, utilizando a barra a seguir, como você poderia representar o mesmo valor ($\frac{2}{3}$) por outra fração ?

Anexo 1 - TAREFA 4

T4- Tio João deu uma barra de chocolate **de igual tamanho** para cada um dos seus cinco sobrinhos, porém, cada barra estava dividida em diferentes partes: Ana recebeu a sua barra dividida em duas partes iguais; Bruno recebeu a sua dividida em quatro partes iguais; a barra de Carlos estava dividida em 6 partes iguais; a de Maria estava dividida em 8 partes iguais e, Pedro recebeu a sua dividida em 10 partes iguais.

a) Faça a representação das barras de chocolate recebidas por cada sobrinho com suas respectivas divisões:

Ana

Bruno

Carlos

Maria

Pedro

Como eram barras de chocolate grandes, Tio João recomendou que seus sobrinhos não comessem tudo de uma só vez. Seguindo a sugestão do Tio, Ana comeu metade de sua barra, Bruno e Carlos comeram, cada um, duas partes de seus chocolates; Maria resolveu comer seis partes de sua barra e, Pedro decidiu comer cinco partes da sua.

b) Escreva as frações que representam as partes que foram comidas por cada sobrinho.

Ana = _____ Bruno = _____ Carlos = _____

Maria = _____ Pedro = _____

c) Quais sobrinhos comeram partes iguais de suas barras de chocolate ? Justifique sua resposta.

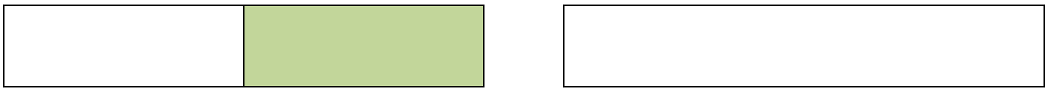
d) Algum sobrinho comeu, de uma só vez, mais chocolate que os demais ? Se sim, qual deles ? Justifique sua resposta.

e) Quem comeu menos chocolate ? Justifique sua resposta.

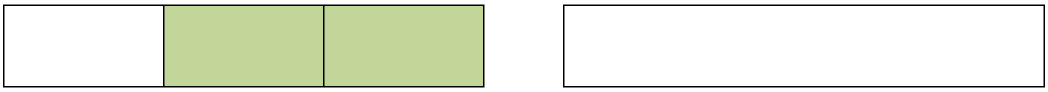
Anexo 1 - TAREFA 5

T5- Divida cada barra do lado direito em partes iguais e pinte as partes necessárias para que ela tenha o mesmo valor representado nas respectivas barras à esquerda:

(A) $\frac{1}{2} = \frac{?}{4}$

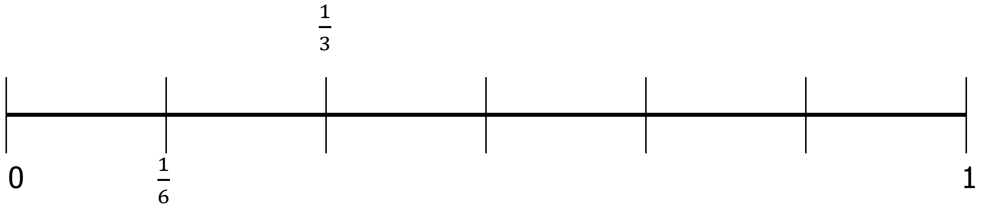


(B) $\frac{2}{3} = \frac{?}{6}$



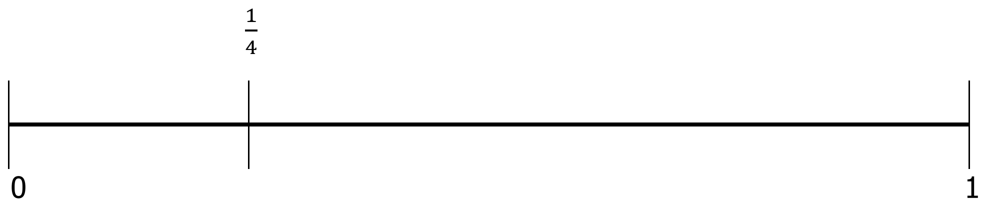
Anexo 1 - TAREFA 6

T6- Use a reta numérica para encontrar a fração equivalente a $\frac{1}{3}$. Explique seu raciocínio.



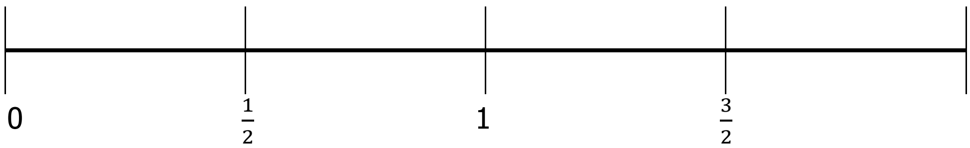
Anexo 1 - TAREFA 7

T7- Use a reta numérica para encontrar a fração equivalente a $\frac{1}{4}$ com denominador 12. Explique seu raciocínio.



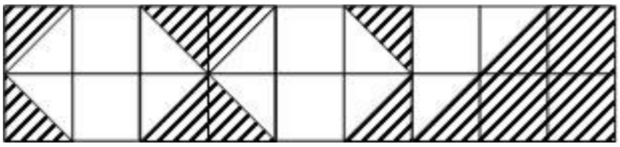
Anexo 1 - TAREFA 8

T8- Use a reta numérica para encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{2}$ com denominador 6 . Explique seu raciocínio.



Anexo 1 - TAREFA 9

T9- Dezoito quadrados iguais são construídos e sombreados como mostra a figura. O João afirmou que a fração $\frac{4}{9}$ representa a área total sombreada. Você acha que ele está correto ? Justifique seu raciocínio.



Anexo 1 - TAREFA 10

T10- Coloque em ordem crescente as frações, justificando seu raciocínio:

a) $\frac{3}{4}, \frac{17}{4}, \frac{9}{4}$

b) $\frac{9}{8}, \frac{9}{1}, \frac{9}{7}, \frac{9}{4}$

Anexo 1 - TAREFA 11

T11- Cristina e Mariana estão lendo o mesmo livro. Cristina já leu sete décimos do livro e Marina já leu cinco décimos. Qual das duas leu mais desse livro até o momento ? Justifique o seu raciocínio.

Anexo 1 - TAREFA 12

T12- Júnior correu $\frac{6}{7}$ de uma pista. Marcelo correu $\frac{13}{14}$ da mesma pista. Nessas condições responda: quem correu menos, Júnior ou Marcelo ? Justifique o seu raciocínio.

Anexo 1 - TAREFA 13

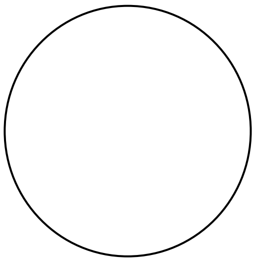
T13- Matheus e Luan ganharam cada um, uma barra de chocolate do mesmo tamanho. Sabe-se que Matheus comeu $\frac{2}{3}$ da sua barra de chocolate. Já Luan, comeu $\frac{3}{4}$ de sua barra de chocolate. Quem comeu a maior quantidade de chocolate, Matheus ou Luan? Justifique sua resposta.

Matheus Luan

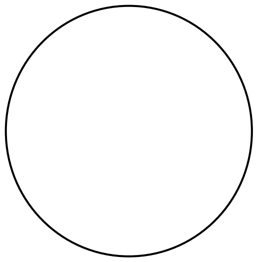
Anexo 1 - TAREFA 14

T14- Pedrinho e José fizeram uma aposta para ver quem comia mais pedaços de pizza. Pediram duas pizzas de igual tamanho. Pedrinho dividiu a sua em oito pedaços iguais e comeu seis; José dividiu a sua em doze pedaços iguais e comeu nove. Qual das conclusões abaixo está correta ? Justifique seu raciocínio.

Pedrinho



José



(A) José comeu o dobro do que Pedrinho comeu.
(B) Pedrinho comeu a terça parte do que José comeu.
(C) Pedrinho e José comeram a mesma quantidade de pizza.
(D) José comeu a metade do que Pedrinho comeu.

Anexo 1 - TAREFA 15

T15- Quatro amigos João, Pedro, Ana e Maria iniciaram juntos um trajeto. Até agora, João andou $\frac{3}{4}$ do caminho; Pedro, $\frac{2}{3}$; Ana, $\frac{4}{9}$ e Maria, $\frac{9}{12}$. Os amigos que se encontram no mesmo ponto do percurso são:

(A) João e Maria.
(B) Pedro e Maria.
(C) João e Pedro.
(D) Ana e Maria.

Justifique o seu raciocínio.

Anexo 1 - TAREFA 16

T16- Circule as frações que são maiores que $\frac{1}{2}$, explicando seu raciocínio:

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$

Anexo 1 - TAREFA 17

T17- Responda as questões a seguir, explicando seu raciocínio:

(I) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

a) Você acha que o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

b) Você acha que o resultado é maior ou menor que 1 ?

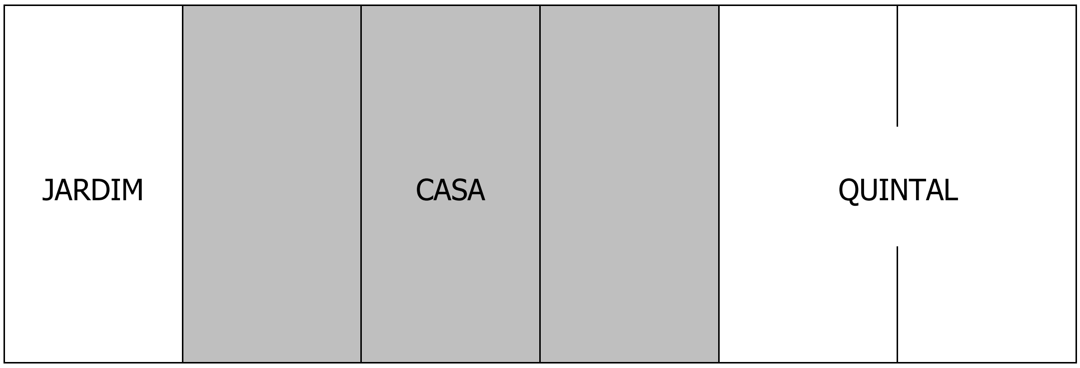
(II) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

a) E nessa soma, o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

b) O resultado é maior ou menor que 1 ?

Anexo 1 - TAREFA 18

T18- O Sr. João tem um terreno na Maré Mansa. Esse terreno foi dividido em 6 partes iguais e sua casa de praia foi construída da seguinte maneira:



a. Que fração do terreno foi ocupada pela casa? Que fração do terreno foi ocupada pelo jardim? E pelo quintal ?

b. Que fração do terreno foi ocupada pela casa e pelo quintal juntos?

c. Que fração do terreno foi ocupada pelo quintal e pelo jardim juntos?

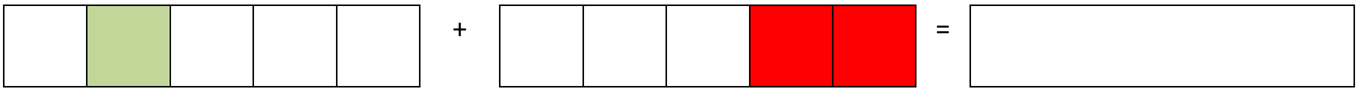
d. Que fração do terreno sobra quando retiramos o jardim?

e. Que fração do terreno sobra quando retiramos o quintal?

Anexo 1 - TAREFA 19

T19- Recorrendo às barras, indique os resultados das operações indicadas a seguir:

(A) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{\ }{\ }$



(B) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{\ }{\ }$

Anexo 1 - TAREFA 20

T20- Calcule o valor das adições abaixo, explicando seu raciocínio:

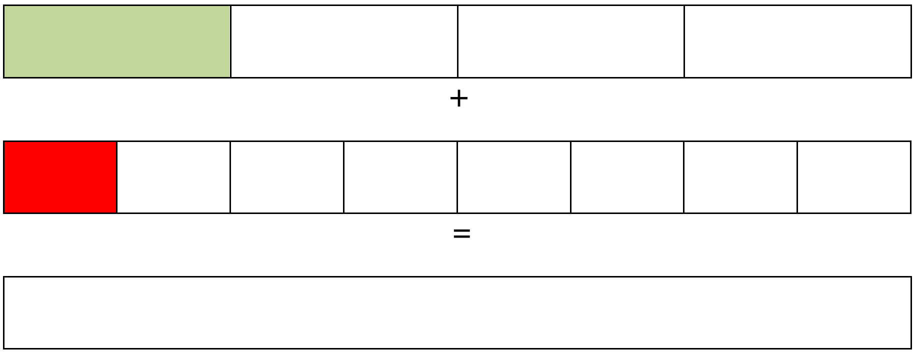
a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} =$

b) $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} =$

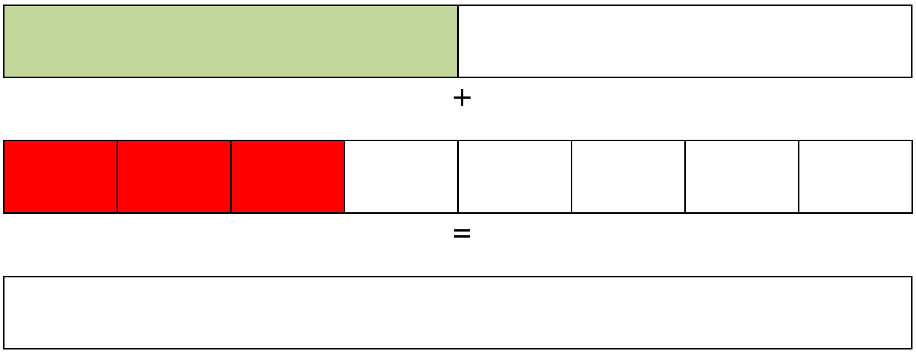
Anexo 1 - TAREFA 21

T21- Considerando as frações com denominadores diferentes abaixo indicadas e utilizando as barras, calcule os resultados das adições a seguir:

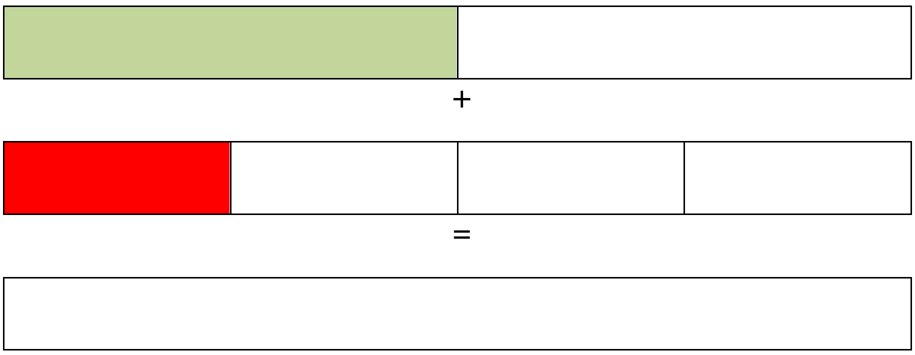
(A) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{\quad}{\quad}$



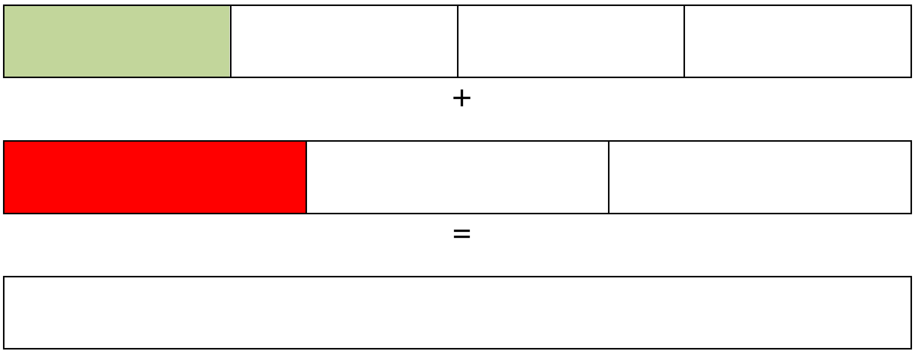
(B) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{\quad}{\quad}$



(C) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\quad}{\quad}$



(D) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{\quad}{\quad}$



Anexo 1 - TAREFA 22

T22- Calcule o valor das adições abaixo, explicando seu raciocínio:

a) $\frac{5}{2} + \frac{3}{4} =$

----

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} =$

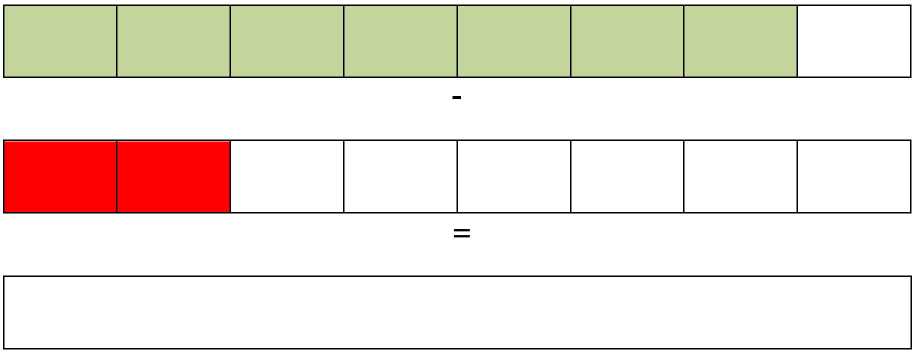
----

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} =$

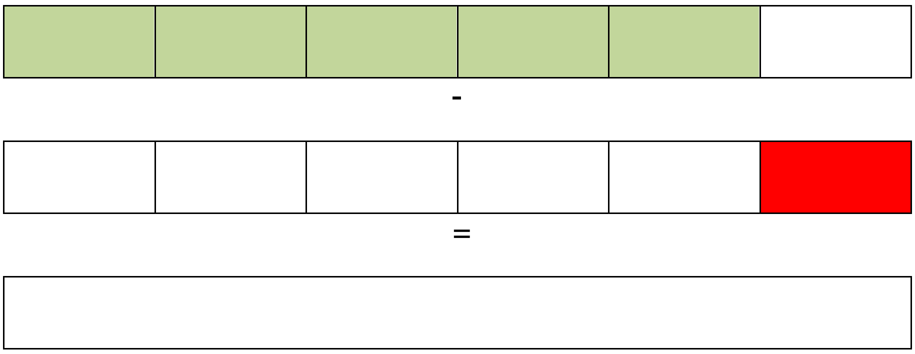
Anexo 1 - TAREFA 23

T23- Recorrendo às barras, indique os resultados das operações indicadas a seguir:

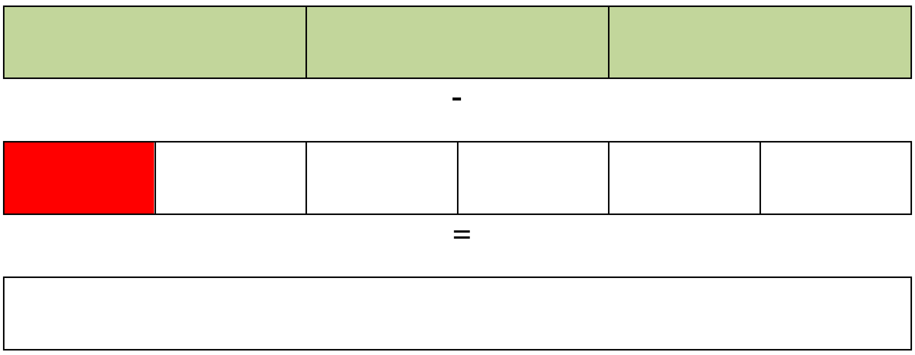
(A) $\frac{7}{8} - \frac{2}{8} =$



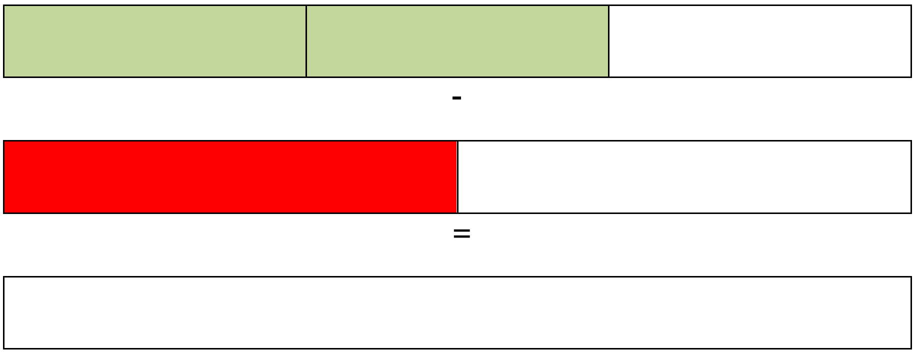
(B) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} =$



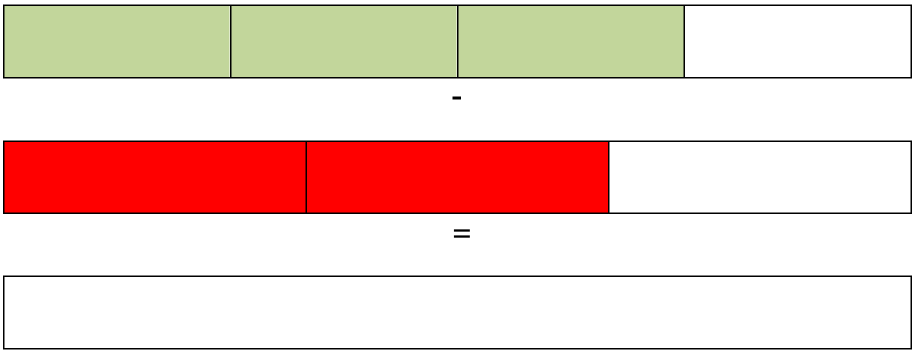
(C) $\frac{3}{3} - \frac{1}{6} = \frac{\quad}{\quad}$



(D) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$



(E) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$



Anexo 1 - TAREFA 24

T24- Calcule o valor das subtrações abaixo:

a) $\frac{17}{3} - \frac{2}{3} =$

----

b) $\frac{21}{19} - \frac{2}{19} =$

----

c) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} =$

----

d) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

Anexo 1 - TAREFA 25

T25- Ontem Marta leu $\frac{3}{4}$ das paginas de um livro. Hoje ela leu $\frac{1}{5}$ das páginas desse mesmo livro.

a) Que fração representa o total das páginas do livro que Marta já leu até o momento ?

b) Quanto falta, em número fracionário, para Marta terminar de ler o livro ?

Anexo 1 - TAREFA 26

T26- Moisés é um pescador. Ele levou um cesto de peixe para vender no mercado. No período da manhã ele conseguiu vender $\frac{1}{3}$ da quantidade de peixe que tinha levado. No período da tarde, ele conseguiu vender $\frac{3}{8}$ da quantidade de peixe que tinha levado. O que sobrou ele levou e congelou para vender no dia seguinte.

a) Que fração do total de peixes, Moisés conseguiu vender nos dois períodos?

b) Que fração do total de peixes sobrou para ser vendida no outro dia?

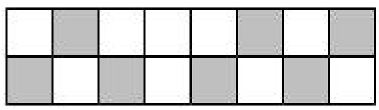
Anexo 1 - TAREFA 27

T27- Coloque V(verdadeiro) ou F (falso) nas afirmativas, corrigindo aquelas que considere falsas.

(   ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$

(   ) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{4}{2}$

(   ) Na malha ao lado estão pintados $\frac{3}{16}+\frac{1}{4}$ do total de quadradinhos



Anexo 1 - TAREFA - EXTRA

Responda as questões a seguir, explicando seu raciocínio:

(I) $\frac{1}{5} + \frac{3}{4}$

a) Você acha que o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

b) Você acha que o resultado é maior ou menor que 1 ?

(II) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$

a) E nessa soma, o resultado é maior ou menor que $\frac{1}{2}$?

b) O resultado é maior ou menor que 1 ?

Anexo 2 - Pedido de Autorização ao Colégio

Exma. Sra. Diretora do Colégio Nossa Senhora de Lourdes - Botafogo

Rio de Janeiro, 01 de agosto de 2017

Eu, Marcelo Cardoso da Costa, professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, no âmbito do Mestrado em Educação na Especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontro-me a desenvolver uma pesquisa intitulada **Adição e Subtração de Números Racionais na Representação Fracionária: uma proposta de ensino em turmas de 5º ano**, que tem por objetivo perceber a construção e o desenvolvimento do conceito do número racional em sua representação fracionária pelos alunos, através de tarefas propostas envolvendo nomeadamente equivalência, comparação, adição e subtração de frações.

Para concretizar o estudo proposto, venho por este meio solicitar a V. Exª autorização para realizar um trabalho de investigação com as turmas **501** e **502** do 5º ano de escolaridade, através de um trabalho colaborativo com a Professora Fernanda Monsão, a decorrer entre os dias 23 de agosto de 2017 e 01 de setembro de 2017, durante as aulas de Matemática. A recolha de dados será baseada na gravação em vídeo e áudio das aulas e, para este fim, será solicitada uma autorização a todos os responsáveis pelos alunos participantes. Comprometo-me, desde já, a salvaguardar o anonimato de todos os participantes, ressaltando a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo esta utilizada somente na esfera da realização dessa investigação.

Convicto de que este estudo poderá contribuir para que sejam encontradas / aprimoradas estratégias e procedimentos de ensino que auxiliem os alunos a consolidar o conceito de número racional, bem como a ultrapassar as suas dificuldades na resolução de problemas envolvendo as operações mencionadas acima, solicito autorização para proceder à recolha de dados na forma acima descrita.

Agradecendo desde já a sua atenção e colaboração, peço deferimento.

Atenciosamente,

Marcelo Cardoso da Costa.

Anexo 3 - Pedido de Autorização aos Responsáveis de Educação

Exmo. Sr. Responsável de Educação

Eu, Marcelo Cardoso da Costa, professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, no âmbito do Mestrado em Educação na Especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, encontro-me a desenvolver uma pesquisa intitulada **Adição e Subtração de Números Racionais na Representação Fracionária: uma proposta de ensino em turmas de 5º ano**, que tem por objetivo perceber a construção e o desenvolvimento do conceito do número racional em sua representação fracionária pelos alunos, através de tarefas propostas envolvendo nomeadamente equivalência, comparação, adição e subtração de frações.

Para a concretização do estudo, necessito observar e recolher dados sobre o trabalho dos alunos durante as aulas, a decorrer entre os dias 23 de agosto de 2017 e 01 de setembro de 2017. A recolha de dados será baseada na gravação em vídeo e áudio das aulas, com a colaboração e presença da Professora Fernanda Monsão. Desde já, comprometo-me a salvaguardar o anonimato de todos os participantes, ressaltando a confidencialidade relativamente à informação recolhida, sendo esta utilizada somente na esfera da realização dessa investigação.

Convicto de que este estudo poderá contribuir para que sejam encontradas / aprimoradas estratégias e procedimentos de ensino que auxiliem os alunos a consolidar o conceito de número racional, bem como a ultrapassar as suas dificuldades na resolução de problemas envolvendo as operações mencionadas acima, solicito autorização para proceder à recolha de dados junto do seu educando.

Agradeço desde já a sua atenção e colaboração.

Atenciosamente,

Marcelo Cardoso da Costa.

✂---

Eu, ____,

responsável pelo(a) aluno(a)____,

da turma __________, do 5º ano, **( ) Autorizo / ( ) Não autorizo** que ele(a) participe na recolha de dados dirigida pelo Professor Marcelo Cardoso da Costa, no âmbito de seu estudo de Mestrado.

Data: _________ - Assinatura: ____